FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A Xeometría dos sólidos dos Elementos de Euclides (Libro XI)

Joel Pérez Villarino

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A Xeometría dos sólidos dos Elementos de Euclides (Libro XI)

Joel Pérez Villarino

07/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álxebra
Título: A Xeometría dos sólidos dos Elementos de Euclides (Libro XI)
Breve descrición do contido
O Libro XI dos Elementos de Euclides, xunto cos libros XII e XIII, adícase ó estudo da xeometría do espazo. Este TFG céntrase no Libro XI. Estúdase o método que seguen os Elementos de Euclides facendo demostracións análogas (mantendo os argumentos utilizados en Elementos) pero nunha linguaxe actual.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen **VII**

Introducción **IX**

1. Definiciones Libro XI **1**

2. Resultados Libro XI **5**

Bibliografía **61**

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo reescribir el Libro XI de *Los Elementos* de Euclides con un lenguaje matemático actual, respetando en todo momento los argumentos y metodologías empleados por Euclides en el original.

Abstract

The aim of this project is to rewrite the XI Book of Elements by Euclides, with a current mathematical language, by all means respecting the arguments and methodology used by Euclides himself in the original work.

Introducción

Todas las culturas de la antigüedad se acercaron, de un modo más o menos primitivo, al estudio de las matemáticas, en sentido de cantidades, proporciones, geometría, aritmética...pero de entre todas ellas hay una que destaca, la griega, en la cual podemos encajar a Euclides como uno de sus máximos exponentes, debido a la elaboración del tratado *Los Elementos*, datado por convención en el siglo III a.C. y caracterizado por un rigor inédito en aquel tiempo.

Sobre la vida de Euclides se tiene poca información. De hecho, se llegó a dudar de que fuera una persona en pro de pseudónimo colectivo de un grupo de matemáticos o del líder de dicho grupo, aunque la mayoría de expertos no lo cree. En relación a su vida parece haber únicamente un par de referencias de fuentes creíbles, atribuidas a Proclo y a Pappo, siglo V y siglo I, respectivamente, en relación a que fue más joven que los discípulos de Platón y mayor que Arquímedes; así como que vivió y enseñó en Alejandría en torno al 300 a.C., época que alcanza su madurez intelectual. Como curiosidad, aún sin contrastar y más cercano a la leyenda, se le presupone desprecio por la aplicación práctica de las matemática en el sentido de no necesitar la existencia de una finalidad para su desarrollo, dibujándosenos una persepctiva de Euclides en pro del conocimiento por el conocimiento.

Coincidiendo con su etapa de madurez elabora el citado tratado, *Los Elementos*. Es una recopilación llevada a cabo por Euclides que sintetiza la matemática griega. Se nutre en resultados muchos ya conocidos con anterioridad, como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras. El contenido del tratado es aritmético-geométrico, teniendo especial énfasis en la corriente geométrica, no solo por ser el tema central, sino porque el lenguaje geométrico es el empleado en la mayor parte de casos para describir resultados y problemas aritméticos. Esta motivación es debida a que los griegos no admitían los números irracionales, descubiertos a razón de la longitud de la diagonal del cuadrado unidad, obtando por representar dichas cantidades por medio de segmentos.

El tratado consta de trece libros o capítulos que se engloban de la siguiente manera según los temas comprendidos. Los Libros I-IV tratan sobre la geometría en el plano, en particular, sobre paralelismo y ortgonalidad de rectas y propiedades de triángulos, paralelogramos y circunferencias, así como la inscripción y circunscripción de figuras planas. Los libros V y VI sobre la teoría generalizada de la proporción, en especial relación con segmentos, triángulos y paralelogramos. Los libros VII-IX sobre la teoría aritmética, comprendida hoy como teoría de números, con conceptos de calado como el de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y resultados muy importantes como el algortimo de Euclides o la prueba de la existencia de infinitos números primos. El libro X ofrece una conceptualización de la inconmensurabilidad y una clasificación de las variedades de rectas irracionales, esto es, el estudio de los números irracionales; y los libros XI-XIII sobre la geometría en el espacio, tema sobre el que trata este trabajo y el cual desgranaremos posteriormente.

El éxito de Euclides reside, en gran medida, en la organización sistemática de los resultados y en comprender la importancia de las demostraciones en base a hipótesis y resultados demostrados previamente. Más especificamente, Proclo alaba especialmente cuatro virtudes.

La primera el acierto en la selección de proposiciones y problemas considerados, ya que Euclides "no ha incluido todo lo que podría haber dicho sino solo lo pertinente para la construcción de los elementos". La segunda es la cantidad de métodos empleados, conviviendo en las pruebas ilustradas pautas marcadas por el realismo platónico (considera los objetos matemáticos universales con una existencia objetiva independiente de nuestro conocimiento de los mismos), cuyo exponente es el método de prueba por reducción al absurdo; junto el constructivismo, donde las pruebas son construcciones o algoritmos.

La tercera proviene de la estructura que sigue a lo largo de todo el tratado, la cual continua vigente a día de hoy,es decir, la organización del texto matemático en definiciones, proposiciones menores (porismas, lemas, corolarios), proposiciones y demostraciones. Toma como punto de partida las definiciones intentando evitar problemas lógicos como el razonamiento circular y las regresiones infinitas. De igual manera sucede para el caso de las demostraciones, establece enunciados que han de ser aceptados sin demostración (axiomas), para evitar problemas lógicos y posteriormente cada prueba se basa en axiomas, definiciones y proposiciones previamente demostradas utilizando las reglas de la lógica. Como último punto se señala el carácter didáctico del tratado, en palabras de Proclo," Euclides no solo enseña una ciencia, sino que, en cierto modo, parece empeñado en enseñar a aprenderla y construirla".

Consecuencia de las virtudes señaladas, la obra *Los Elementos* ha sido el texto matemático del que más ediciones se han hecho, un manual que ha estado vigente durante 2000 años como referencia imprescindible en el estudio de la geometría y del cual muchas de sus características esenciales tienen vigencia aún a día de hoy. Sus páginas han servido como fuente de inspiración y de desafío, empujando a gran cantidad de personas a lo largo de la historia a indagar en el conocimiento de las matemáticas, potenciando el descubrimiento y desarrollo de nuevos enunciados y técnicas que permitieron a dicha ciencia avanzar, no solo en campos tradicionales como la geometría o el álgebra, sino también en ramas más modernas como la criptografía o la matemática computacional.

Los Elementos también sirve de ejemplo de lo que muchos llaman la belleza de las matemáticas. En palabras de Hardy, "La belleza es el primer requisito: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas". Es por esto que dicha obra ha inspirado a otras ramas del conocimiento más cercanas a las humanidades, en especial a las bellas artes (pintura, escultura y arquitectura) y a la música, pero también a la literatura, la filosofía o incluso en la política.

En relación a la arquitectura, Euclides fue considerado un teórico. En un primer momento por la teoría de la proporción, que se remonta a la tradición pitagórica y tuvo más empuje hasta el siglo XVII, cuando Guarino Guarini publica el tratado *Archittetura civile*, el cual contiene muchas cosas transportadas directamente de *Los Elementos* con un enfoque predominantemente geométrico. Aún así, la dualidad aritmética-geometría estuvo muy presente en dicho periodo, en especial durante el Renacimiento, donde importantes exponentes como Vitruvio o Leon Battista Alberti eran conocedores de la geometría euclidiana. Desde el siglo XVII la arquitectura evolucionó notablemente pero la influencia euclidiana siguió siendo importante, algo de manifiesto en obras como *Urbanisme* de Le Corbusier (1924), o en arquitectos más recientes como Zaha Hadid o Frank Gehry.

En relación a la escultura, la teoría de la proporción también tuvo una notable influencia en el mundo clásico, viéndose potenciada en el Renacimiento. Mención especial a Leonardo Da Vinci, quien realizó un análisis mostrando como las distintas partes del cuerpo estaban relacionadas por la razón áurea.

De forma menos aparente pero igualmente estrecha, Euclides tuvo notable influencia en la pintura, en especial durante el Renacimiento, a partir del descubrimiento de la perspectiva lineal y de su generalización, punto de partida para el desarrollo de la teoría de la perspectiva, primero de manera tórica por Alberti,y posteriormente de forma más completa gracias a Piero della Francesca y su obra *De prospectiva pingendi*. Pero no se limita solo al Renacimiento. Ya en el siglo XX podemos encontrarnos su pegada en corrientes artísticas que en un primer momento no se nos ocurriría encasillar con él, tales como el abstraccionismo, de la mano de Kandinsky, o el surrealismo con autores como Max Ernst, René Magritte o Salvador Dalí.

Con respecto a la música, ya los pitagóricos estudiaron la armonía, llegando a la conclusión de que dos sonidos tocados simultáneamente resultaban agradables cuando el cociente entre la longitud de las cuerdas era una fracción de números enteros pequeños, guardando este hecho estrecha relación con el algortimo de Euclides, también usado en el siglo XVII para afinar instrumentos musicales, e incluso, más recientemente, para la composición musical por medio de la computación de la mano de Iannis Xenakis. Aún más, gracias a Godfried Toussaint sabemos que la mayor parte de ritmos tradicionales en el mundo son generados por dicho algoritmo.

La literatura no será menos. Con relación a la novela, Euclides ha sido citado en varias obras como ejemplo de racionalidad, entre la que se encuentra un relato de Conan Doyle, *A study in scarlet*; pero el campo a destacar es la poesía, con cantidad de poemas en los que se alude a su persona o a su obra, como por ejemplo, *Euclid alone has looked on Beauty bare* (Millay, 1923), obra de la que Eva Brann comenta: "La poeta sugiere que cuando miras los objetos euclidianos, como círculos, triángulos y rectángulos, ves algo revelado que las formas corpóreas no muestran, y que te puede conmover igual que la belleza física", *A mathematical problem* (Coleridge, 1791), donde se esboza la demostración de la Proposición 1, Libro I, en forma de poema, o *Euclidiennes* (Guillevic, 1967), que dota de personalidad individual a distintas formas geométricas que aparecen en *Los Elementos*.

Para finalizar esta introducción entraremos más en detalle en el contenido de los libros XI-XII de *Los Elementos*. El Libro XI, sobre el cual versa este trabajo, costa, en primer lugar, del conjunto de definiciones que nutrirán el tema de geometría en el espacio, comenzando por definir conceptos como que es un sólido o la perpendicularidad entre rectas y planos, y finalizando con varias definiciones en relación a la esfera, al cilindro y a los sólidos regulares.

En segundo lugar, constituye la elaboración de una serie de resultados que serán herramientas necesarias para poder elaborar construcciones más complejas en los siguientes libros, como diversos resultados sobre paralelismo y perpendicularidad entre rectas, planos y ambos; y sobre ángulos sólidos (muchos de los cuales con las correspondientes construcciones). Por último, tenemos cantidad de propiedades relativas a los sólidos,y , en particular, paralelepípedos, entre las que se encuentran relativas a la proporcionalidad, semejanza e igualdad entre ellos, tan importantes como la Proposición 31, la cual asegura que dos sólidos paralelepípedos de igual base y altura son iguales entre sí.

En este capítulo cobra una especial relevancia el Libro I, pues a lo largo de las distintas demostraciones se requiere emplear muchos de sus resultados, particularmente los relativos a construcciones de rectas paralelas o perpendiculares, así como a la igualdad y propiedades de triángulos y de paralelogramos; pero también presentan una notable influencia los Libros V y VI en relación con los resultados de proporcionalidad y semejanza.

EL Libro XII continua la senda del estudio de distintos sólidos y sus propiedades, en particular, de las pirámides, los conos, los cilindros y las esferas, estudio que culmina en el Libro XIII con la construcción de los conocidos como sólidos platónicos (o regulares), a saber: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, destacados en la filosofía clásica pues Platón, en su obra *Timeo*, los asocia a los cuatro elementos clásicos: fuego, tierra, aire, agua; y al propio Universo.

Capítulo 1

Definiciones Libro XI

Definición 1.1. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad[1].

Definición 1.2. El extremo de un sólido es una superficie.

Definición 1.3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano, es decir, dadas la recta r y el plano π,

$$r \perp \pi :\Leftrightarrow \measuredangle(r,s) = 1\,recto,\ \forall\, s\,recta\,/\,s \cap r \neq \emptyset,\ \ s \in \pi.$$

Definición 1.4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante, es decir, dados los planos π, γ, y sea $s = \pi \cap \gamma$ la sección común,

$$\pi \perp \gamma :\Leftrightarrow\ [\forall\, r\,recta\,/\,r \in \pi\ y\ \measuredangle(r,s) = 1\,recto \Rightarrow \measuredangle(r,\gamma) = 1\,recto.]$$

Definición 1.5. Inclinación de una recta con un plano es el ángulo contenido por la recta trazada y levantada, cuando, desde el extremo elevado de la recta, se traza una perpendicular al plano y, desde el punto resultante hasta el extremo de la recta en el plano, se une una recta[2].

Definición 1.6. La inclinación de un plano con respecto a un plano es el ángulo agudo comprendido por las (rectas) trazadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos[3].

Definición 1.7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro se inclina sobre otro, cuando dichos ángulos de inclinación son iguales entre sí.

[1] La definición de sólido es tradicional

[2] Se trata del ángulo que forma la recta con su proyección en el plano

[3] Se trata de un ángulo diedro.

Definición 1.8. Planos paralelos son los no concurrentes.

Definición 1.9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.

Definición 1.10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño[4].

Definición 1.11. Ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie con respecto a todas las líneas. Dicho de otra forma: un ángulo sólido es el comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.

Definición 1.12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

Definición 1.13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.

Definición 1.14. Esfera es la figura que queda comprendida cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse[5].

Definición 1.15. El eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo[6].

Definición 1.16. El centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.

Definición 1.17. El diámetro de la esfera es cualquier recta trazada a través del centro y limitada en ambas direcciones por la superficie de la esfera.

[4]Simson da un ejemplo de dos figuras que no son iguales y cumplen dicha definición: considera una pirámide inicial y sobre su base construye dos pirámides iguales, más pequeñas que la inicial y opuestas por la base. Es decir, una de estas pirámides está incrustada en la pirámide inicial y la otra es una pirámide opuesta a la inicial por la base. Entonces, la figura delimitada por la primera pirámide y la opuesta, suma de pirámides, y la figura delimitada por la primera pirámide y la que está incrustada, diferencia de pirámides, no son iguales y cumplen la definición.
Heath, sin embargo, piensa que la definición se refiere únicamente a figuras compuestas por ángulos sólidos triedros, y en este caso, que es el único que Euclides tiene en cuenta, sus afirmaciones son verdaderas y admisibles.

[5]No se trata de una definición de la esfera propiamente dicha, sino de la descripción del modo de generar una esfera.

[6]Se trata de un punto de vista constructivo. Cualquier diámetro de la esfera puede servir como eje de la misma.

Definición 1.18. Cono es la figura que queda comprendida cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse. Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.

Definición 1.19. El eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.

Definición 1.20. La base del cono es el círculo descrito por la recta que gira.

Definición 1.21. Cilindro es la figura que queda comprendida cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse.

Definición 1.22. El eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.

Definición 1.23. Las bases del cilindro son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.

Definición 1.24. Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos ejes y diámetros de las bases son proporcionales.

Definición 1.25. Un cubo es una figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.

Definición 1.26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.

Definición 1.27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.

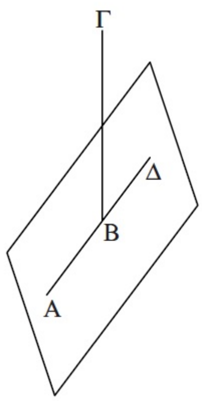
Definición 1.28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

Capítulo 2

Resultados Libro XI

Proposición 2.1. *No es posible que una parte de una línea recta esté en el plano base, mientras que otra parte en el más elevado.*

Demostración. Supongamos que es posible. Sean π el plano de referencia y $AB\Gamma$ línea recta tal que parte de ella, sea AB, esté en el plano de referencia, $AB \in \pi$, y otra parte $B\Gamma$ en un plano más elevado, es decir, $B\Gamma \notin \pi$.



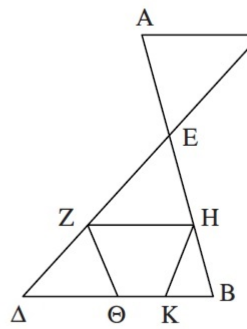
$AB \in \pi \Rightarrow \exists\, B\Delta$ recta que continua $AB/\ B\Delta \in \pi$.
Luego AB segmento / $AB \in AB\Gamma$, $AB \in AB\Delta$. Dicha situación no es posible.
Tomemos un círculo de centro B, con radio AB, y denotemos su circunferencia por $C(B, AB)$.
Como $B \in AB\Gamma$, $B \in AB\Delta$, ambas rectas serán diámetros del círculo, con

$$ABC \cap C(B, AB) = \{A, \Gamma\},\ AB\Delta \cap C(B, AB) = \{A, \Delta\}.$$

Sean $arco(A\Gamma), arco(A\Delta) \in C(B, AB)$, las porciones de circunferencia desde el punto A al punto Γ, y desde el punto A al punto Δ, respectivamente. Entonces: $arco(A\Gamma) \neq arco(A\Delta)$, llegando así a una contradicción con la Definición 17, Libro I[1]. □

Proposición 2.2. *Si dos rectas se cortan una a otra están en un plano, y todo triángulo está en un plano.*

Demostración. Sean AB,$\Gamma\Delta$ rectas $/AB \cap \Gamma\Delta = E$.
Tomamos $Z \in E\Delta$, $H \in EB$, y definimos los segmentos ΔB y HZ.
Consideraremos también los puntos $\Theta, K \in \Delta B$ para trazar las rectas $Z\Theta$, HK.



En primer lugar, veamos que el triángulo $E\Delta B$ está en un plano que denominaremos π. Por reducción al absurdo, digamos que $E\Delta B$ no está en el plano en su totalidad, es decir, parte de él está en otro plano γ, luego:

$$\left.\begin{array}{c} Z\Delta\Theta \in \pi \\ E\Delta B \setminus Z\Delta\Theta \in \gamma \\ \pi \neq \gamma \end{array}\right| \Rightarrow \quad Z\Delta \in \pi \ y \ EZ \in \gamma.$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{c} HBK \in \pi \\ E\Delta B \setminus HBK \in \gamma \\ \pi \neq \gamma \end{array}\right| \Rightarrow \quad HB \in \pi \ y \ EH \in \gamma.$$

Sea ahora el trapecio $Z\Delta BH$ en $E\Delta B$ de forma que:

$$\left.\begin{array}{c} Z\Delta BH \in \pi \\ E\Delta B \setminus Z\Delta BH \in \gamma \\ \pi \neq \gamma \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} EZ \in \gamma \ y \ Z\Delta \in \pi \\ EH \in \gamma \ y \ HB \in \pi. \end{array}\right.$$

[1]Definición 17, Libro I: Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide al círculo en dos partes iguales

Aplicando a estas consideraciones la Proposición 2.1

$$\left.\begin{array}{r} EZ \in \gamma\,,\, Z\Delta \in \pi \\ EH \in \gamma\,,\, HB \in \pi \\ Z \in E\Delta\,,\, H \in EB \end{array}\right| \Rightarrow \quad \pi = \gamma$$

Luego tenemos que el triángulo $E\Delta B$ está en el plano π.

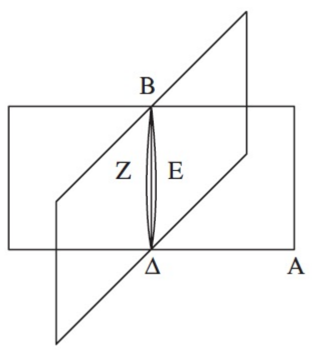
Comprobemos por último que ambas rectas están en el mismo plano por aplicación directa de la Proposición 2.1:

$$\left.\begin{array}{c} E\Delta \in E\Delta B \in \pi \\ EB \in E\Delta B \in \pi \\ E\Delta \in \Gamma\Delta\,,\, EB \in AB \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Gamma\Delta \in \pi\,,\, AB \in \pi.$$

□

Proposición 2.3. *Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ planos tales que $AB \cap \Gamma\Delta = B\Delta$ línea. Queremos ver que la línea $B\Delta$ es recta.



Supongamos que $B\Delta$ es una línea no recta, y tracemos en los planos AB y $B\Gamma$ las rectas $BE\Delta$ y $BZ\Delta$ respectivamente. Por construcción, $\{B\} \cup \{\Delta\} \subset BE\Delta \cap BZ\Delta$, es decir, ambas rectas tienen los mismos extremos.

Como $BE\Delta$ y $BZ\Delta$ tienen los mismos extremos, y $BE\Delta \neq BZ\Delta$, entonces $BE\Delta$ y $BZ\Delta$ encierran un área, lo cual no es posible por la Noción Común 9: dos rectas no encierran un espacio.

Luego $BE\Delta$ y $BZ\Delta$ no son rectas.

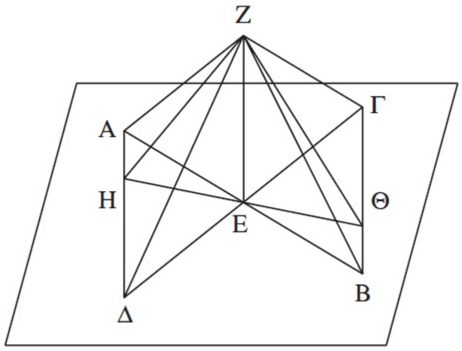
Por el carácter genérico de $BE\Delta$ y $BZ\Delta$ queda probado que no habrá ninguna otra recta trazada de B a Δ, salvo $B\Delta$, sección común de los planos AB y $B\Gamma$. □

Proposición 2.4. *Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su sección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.*

Demostración. Sean AB,$\Gamma\Delta$ rectas tales que $AB \cap \Gamma\Delta = \{E\}$, y levantemos una recta EZ que forma ángulos rectos con AB y $\Gamma\Delta$,

$$\measuredangle(AB, EZ) = 1\, recto = \measuredangle(\Gamma\Delta, EZ).$$

Queremos probar que EZ forma también ángulos rectos con el plano que contiene a las rectas AB,$\Gamma\Delta$, es decir, que la recta EZ forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano.



Tomamos las rectas AE,BE,ΓE,ΔE de forma que:

$$AE = BE = \Gamma E = \Delta E.$$

Trazamos las rectas $A\Delta$ y $B\Gamma$, además de la recta $HE\Theta$ al azar pasando por E de forma que:

$$HE\Theta \cap A\Delta = \{H\}\,,\; HE\Theta \cap \Gamma B = \{\Theta\}$$

Nuestro objetivo es ver que $\measuredangle(EZ, HE\Theta) = 1\, recto$.
Tomamos $Z \in EZ$ y trazamos las rectas: ZA,ZH,$Z\Delta$,$Z\Gamma$,$Z\Theta$,ZB.
Por la Proposición 4, Libro I [2], aplicada a los triángulos $AE\Delta$ y ΓEB:

$$\left.\begin{array}{r} AE = \Gamma E \\ E\Delta = EB \\ \measuredangle(AE, E\Delta) = \measuredangle(\Gamma E, EB) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} (Base)A\Delta = (Base)\Gamma B \\ AE\Delta = \Gamma EB \\ \measuredangle(\Delta AE) = \measuredangle(\Gamma EB) \end{array}\right.$$

[2] Proposición 4, Libro I: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber, los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente.

Ahora, considerando los triángulos AHE,$BE\Theta$, por la proposición 26, libro I [3]:

$$\left.\begin{array}{c}\measuredangle(AE,EH)=\measuredangle(EB,E\Theta)\\ \measuredangle(AH,AE)=\measuredangle(EB,E\Theta)\\ AE=EB\end{array}\right|\Rightarrow\quad HE=E\Theta\,,\,AH=B\Theta.$$

Volvemos a emplear la Proposición 4, Libro I, en referencia a los triángulos ZAE,ZEB:

$$\left.\begin{array}{c}AE=EB\\ \measuredangle(AE,ZE)=\measuredangle(EB,ZE)=1recto\\ ZE\ lado\ común\ a\ ambos\end{array}\right|\Rightarrow\quad (base)ZA=(base)ZB.$$

Por el mismo razonamiento aplicado a los triángulos $ZE\Delta$,$Z\Gamma E$, tenemos:

$$(base)Z\Gamma=(base)Z\Delta.$$

Trabajamos ahora sobre los triángulos $ZA\Delta$, $Z\Gamma B$. Por la Proposición 8, Libro I [4]:

$$\left.\begin{array}{c}A\Delta=\Gamma B\\ ZA=ZB\\ (base)Z\Delta=(base)Z\Gamma\end{array}\right|\Rightarrow\quad \measuredangle(ZA\Delta)=\measuredangle(Z\Gamma B).$$

Y respecto a los triángulos AHZ, $B\theta Z$, por la Proposición 4 del Libro I:

$$\left.\begin{array}{c}ZA=ZB\\ AH=B\Theta\\ \measuredangle(ZAH)=\measuredangle(BZ\Theta)\end{array}\right|\Rightarrow\quad (base)ZH=(base)Z\Theta.$$

Para finalizar, los triángulos ZHE, $ZE\Theta$ verifican:

$$\left.\begin{array}{c}HE=E\Theta\\ (base)ZH=(base)Z\Theta\\ EZ\ lado\ comun\ a\ ambos\end{array}\right|\Rightarrow\quad \measuredangle(HEZ)=\measuredangle(\Theta EZ)=1\,recto\quad\Rightarrow\quad ZE\perp H\Theta.$$

Pero $H\Theta$ es la recta trazada al azar por el punto E, luego ZE hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano base, que es el qué contiene a AB y $\Gamma\Delta$. Así, ZE está en ángulo recto con el plano que va por AB, $\Gamma\Delta$.

□

[3] Proposición 26, Libro I: Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro, ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante.

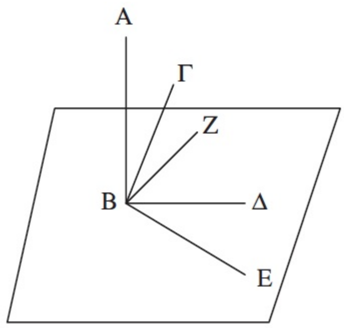
[4] Proposición 8, Libro I: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, y tienen también iguales sus bases respectivas, también serán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.

Proposición 2.5. *Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su sección común, las tres rectas están en un plano.*

Demostración. Sean las rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE tales que $B\Gamma \cap B\Delta \cap BE = \{B\}$, y levantamos la recta AB de forma que

$$\measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(AB\Delta) = \measuredangle(ABE) = 1\,recto.$$

Queremos probar que BE, $B\Delta$, $B\Gamma$ están en un único plano π, nuestro plano base.



Por la Proposición 2.2: $B\Delta, BE \in \pi$, y supongamos que $B\Gamma \notin \pi$. Luego, AB y $B\Gamma$ definen un plano, al cual llamaremos γ.
$\pi \cap \gamma = BZ$, que por la Proposición 2.3 es una línea recta.
Tenemos $AB, B\Gamma, BZ \in \gamma$. Aplicando la Proposición 2.4:

$$AB \perp B\Delta \ y \ AB \perp BE \quad \Rightarrow \quad AB \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad AB \perp r \ \ \forall r \in \pi / B \in r.$$

Como $B \in BZ \in \pi$, entonces, $\measuredangle(ABZ) = 1\,recto.$
Tenemos:

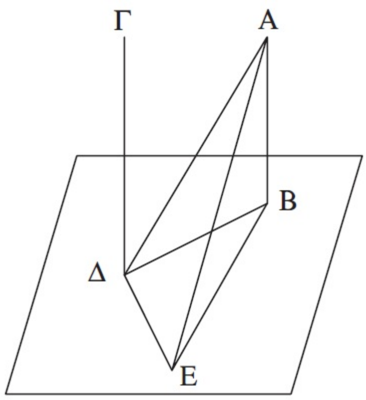
$$\measuredangle(ABZ) = 1\,recto = \measuredangle(AB\Gamma) \Rightarrow B\Gamma \in \pi.$$

Llegamos así a una contradicción.
En conclusión, $B\Gamma, B\Delta, BE \in \pi$, y se verifica la proposición. □

Proposición 2.6. *Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas.*

Demostración. Sean π plano y AB, $\Gamma\Delta$ rectas tal que $AB \perp \pi$, $\Gamma\Delta \perp \pi$.
Queremos probar que AB $\parallel$ $\Gamma\Delta$.
Consideremos los puntos de corte de dichas rectas con el plano:

$$AB \cap \pi = \{B\}\,, \Gamma\Delta \cap \pi = \{\Delta\}.$$



Trazamos las rectas $B\Delta$, ΔE de forma que: $\Delta E \in \pi$, $\measuredangle(B\Delta E) = 1recto$ y $\Delta E = AB$. Continuamos trazando las rectas BE, AE, $A\Delta$. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} AB \perp \pi \\ B\Delta \cap AB = \{B\},\ B\Delta \in \pi \\ BE \cap AB = \{B\},\ BE \in \pi \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(AB\Delta) = \measuredangle(ABE) = 1\,recto.$$

Análogamente:

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma\Delta \perp \pi \\ \Gamma\Delta \cap \Delta B = \{\Delta\},\ \Delta B \in \pi \\ \Gamma\Delta \cap \Delta E = \{\Delta\},\ \Delta E \in \pi \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(\Gamma\Delta B) = \measuredangle(\Gamma\Delta E) = 1\,recto.$$

En primer lugar,teniendo en cuenta la Proposición 4, Libro I, para los triángulos $A\Delta B$, $B\Delta E$:

$$\left.\begin{array}{c} AB = E\Delta \\ \measuredangle(AB\Delta) = \measuredangle(B\Delta E) = 1\,recto \\ B\Delta\ lado\ común\ a\ ambos \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)A\Delta = (base)BE.$$

En segundo lugar, la Proposición 8, Libro I, con respecto a los triángulos ABE, $A\Delta E$ nos permite deducir que:

$$\left.\begin{array}{c} AB = \Delta E \\ A\Delta = BE \\ AE\ base\ comun\ a\ ambos \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \measuredangle(ABE) = \measuredangle(E\Delta A) \\ \measuredangle(ABE) = 1\,recto \end{array} \Rightarrow \quad \measuredangle(E\Delta A) = 1\,recto \quad \Leftrightarrow \quad E\Delta \perp \Delta A.$$

Es más, podemos aplicar a los datos que ya conocemos la Proposición 2.5 de manera que:

$$\left.\begin{array}{c} E\Delta \perp \Delta A \\ E\Delta \perp B\Delta\,,\ E\Delta \perp \Gamma\Delta \\ E\Delta \cap \Delta A \cap B\Delta \cap \Gamma\Delta = \{\Delta\} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \exists\,\gamma\ plano / B\Delta, \Delta A, \Gamma\Delta \in \gamma.$$

Sabemos, por la Proposición 2.2, que todo triángulo está en un plano,

$$\Delta B, \Delta A \in \gamma, \;\; A\Delta B \; tringulo \Rightarrow AB \in \gamma.$$

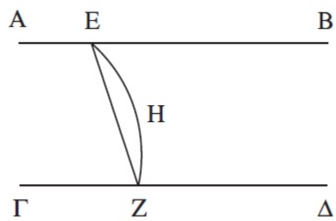
Para concluir, por la Proposición 28, Libro I [5]:

$$AB, \, B\Delta, \, \Gamma\Delta \in \gamma \;, \;\; \measuredangle(AB\Delta) = \measuredangle(B\Delta\Gamma) = 1\, recto \quad \Rightarrow \quad AB \parallel \Gamma\Delta.$$

Así se deduce que si dos rectas están en ángulo recto con el mismo plano, estas serán paralelas. □

Proposición 2.7. *Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ rectas tal que $AB \parallel \Gamma\Delta$, y $E \in AB$, $Z \in \Gamma\Delta$, puntos arbitrarios. Queremos probar que la recta que une dichos puntos está en el mismo plano que las paralelas, digamos π.



Supongamos pues que EHZ es la recta que une los puntos E, Z, y $EHZ \notin \pi$. Trazamos un plano γ verificando que $EHZ \in \gamma$.
Como π, γ planos tal que $\pi \cap \gamma \neq \emptyset$, por la Proposición 2.3: $\pi \cap \gamma = EZ$, recta que surge como sección de ambos planos.
En esta situación,

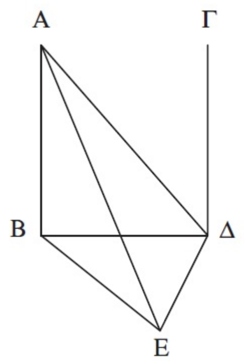
$$\{E, Z\} \subset EHZ \cap EZ \Rightarrow, \acute{A}rea(EHZ, EZ) \neq \emptyset.$$

Llegamos así a una contradicción. Por la Noción Común 9 dos rectas no pueden encerrar un área. Concluimos que $EZ \in \pi$. □

[5]Proposición 28, Libro I: Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.

Proposición 2.8. *Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ rectas paralelas y sea π el plano de referencia. Por hipótesis, $AB \perp \pi$, y queremos probar que $\Gamma\Delta \perp \pi$.



Sea $AB \cap \pi = \{B\}$, $\Gamma\Delta \cap \pi = \{\Delta\}$ y tracemos la recta $B\Delta$. Por la Proposición 2.7:

$$\left.\begin{array}{c} AB \parallel \Gamma\Delta \\ B \in AB,\ \Delta \in \Gamma\Delta \\ B\Delta \textit{ recta} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \exists \gamma \textit{ plano}/AB,\, \Gamma\Delta,\, B\Delta \in \gamma.$$

Trazamos la recta ΔE verificando:

$$\Delta E \in \pi,\ \measuredangle(B\Delta E) = 1\,\textit{recto y } \Delta E = AB.$$

Seguidamente, trazamos las rectas BE, AE y $A\Delta$.
Como:

$$\left.\begin{array}{c} AB \perp \Gamma\Delta \\ B\Delta, BE \in \pi \\ B\Delta \cap BE \cap AB = \{B\} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(ABE) = \measuredangle(AB\Delta) = 1\,\textit{recto}.$$

Notemos que la recta $B\Delta$ incide sobre las rectas AB, $\Gamma\Delta$ paralelas entre sí. Luego la Proposición 29, Libro I [6] nos asegura que:

$$\measuredangle(AB\Delta) + \measuredangle(\Gamma\Delta B) = 2\,\textit{rectos},$$

de donde se deduce:

$$\measuredangle(\Gamma\Delta B) = 1\,\textit{recto} \Rightarrow \Gamma\Delta \perp B\Delta.$$

[6] Proposición 29, Libro I: La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo iguales a dos rectos.

En primer lugar, respecto a los triángulos $AB\Delta$ y $B\Delta E$, por la Proposición 4, Libro I:

$$\left.\begin{array}{c} AB = \Delta E \\ B\Delta \textit{ lado común a ambos} \\ \measuredangle(AB\Delta) = 1\,recto = \measuredangle(B\Delta E) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)A\Delta = (base)BE.$$

En segundo lugar emplearemos la Proposición 8, Libro I, para los triángulos ABE, $A\Delta E$.

$$\left.\begin{array}{c} AB = E\Delta \\ BE = A\Delta \\ AE \textit{ base común a ambos} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \measuredangle(ABE) = \measuredangle(E\Delta A) \\ (\measuredangle(ABE) = 1\,recto) \end{array} \Rightarrow \measuredangle(E\Delta A) = 1\,recto \Rightarrow E\Delta \perp A\Delta$$

Ahora, por la Proposición 2.4:

$$E\Delta \perp A\Delta,\ E\Delta \perp \Delta B \Rightarrow \exists\, \alpha \ plano/B\Delta, \Delta A \in \alpha,\ E\Delta \perp \alpha.$$

Notemos que $\Gamma\Delta \in \alpha$ pues AB, $B\Delta$, $\Gamma\Delta \in \gamma$ y AB, $B\Delta \in \alpha$.
Para finalizar, sobre estas nuevas relaciones podemos volver a aplicar la Proposición 2.4, de manera que:

$$\Gamma\Delta \perp \Delta E,\ \Gamma\Delta \perp B\Delta \Rightarrow \exists\, \beta \ plano\,/\ \Delta E, \Delta B \in \beta \ y\ \Gamma\Delta \perp \beta,$$

pero:

$$\Delta B,\ \Delta E \in \pi \Rightarrow \pi = \beta,$$

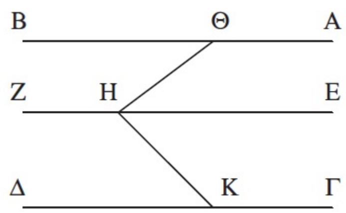
de donde se concluye:

$$\Gamma\Delta \perp \beta,\ \pi = \beta \Rightarrow \Gamma\Delta \perp \pi.$$

□

Proposición 2.9. *Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.*

Demostración. Sean π el plano que pasa a través de EZ y AB, $\Gamma\Delta$ rectas / $AB \parallel ZE$, $\Gamma\Delta \parallel ZE$ y $AB, \Gamma\Delta \notin \pi$.. Queremos probar que $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Tomamos $H \in EZ$ arbitrario y trazamos la recta $H\Theta$ de forma que:

$$H\Theta \cap AB = \{\Theta\},\ \measuredangle_{\pi}(H\Theta, EZ) = 1\, recto$$

Análogamente, trazamos la recta HK tal que:

$$HK \cap \Gamma\Delta = \{K\},\ \measuredangle_{\pi}(HK, EZ) = 1\, recto.$$

Por la Proposición 2.4:

$$EZ \perp H\Theta,\ EZ \perp HK \Rightarrow \exists\, \gamma\ plano / H\Theta,\, HK \in \gamma,\ EZ \perp \gamma.$$

Seguidamente, por la Proposición 2.8:

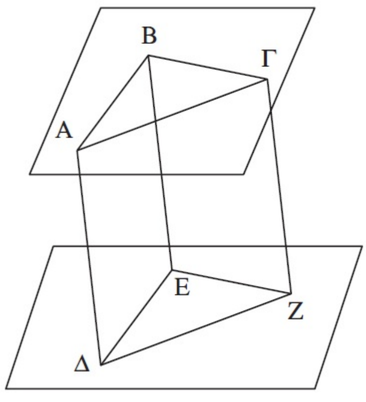
$$EZ \parallel AB,\ EZ \perp \gamma \Rightarrow AB \perp \gamma,$$

$$EZ \parallel \Gamma\Delta,\ EZ \perp \gamma \Rightarrow \Gamma\Delta \perp \gamma.$$

De donde se concluye, por la Proposición 2.6, AB $\parallel$ $\Gamma\Delta$. $\square$

Proposición 2.10. *Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.*

Demostración. Sean AB, $B\Gamma$ rectas/ $AB \cap B\Gamma = \{B\}$; $AB\Gamma$ plano / AB, $B\Gamma \in AB\Gamma$; y ΔE, EZ rectas / $\Delta E \cap EZ = \{E\}$; ΔEZ plano / $\Delta E, EZ \in \Delta EZ$.



Supongamos que: $AB \parallel \Delta E$, $B\Gamma \parallel EZ$ y $AB\Gamma \neq \Delta EZ$. Queremos probar que:

$$\measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(\Delta EZ).$$

Tomemos las rectas AB, $B\Gamma$, $E\Delta$, EZ de forma que: $AB = B\Gamma = E\Delta = EZ$, y tracemos las rectas $A\Delta$, ΓZ, BE, $A\Gamma$, ΔZ.
Por la Proposición 33, Libro I [7]:

$$BA = E\Delta \ y \ BA \parallel E\Delta \Rightarrow A\Delta = BE, \ A\Delta \parallel BE,$$

$$B\Gamma = EZ \ y \ B\Gamma \parallel EZ \Rightarrow BE = \Gamma Z, \ BE \parallel \Gamma Z,$$

de manera que, por la Proposición 2.9:

$$\left.\begin{array}{c} A\Delta \parallel BE \\ BE \parallel \Gamma Z \\ A\Delta \ y \ \Gamma Z \ no\ están\ en\ el\ mismo\ plano \end{array}\right| \Rightarrow \ A\Delta \parallel \Gamma Z.$$

Pero las rectas $A\Gamma$, ΔZ unen a $A\Delta$ y ΓZ, y por la Proposición 33, Libro I:

$$A\Delta = \Gamma Z \ y \ A\Delta \parallel \Gamma Z \Rightarrow A\Gamma = \Delta Z, \ A\Gamma \parallel \Delta Z.$$

Finalizamos la prueba considerando los triángulos $AB\Gamma$, ΔEZ. Por la Proposición 8, Libro I:

$$\left.\begin{array}{c} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ (base)A\Gamma = (base)\Delta Z \end{array}\right| \Rightarrow \ \measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(\Delta EZ).$$

□

Proposición 2.11. *Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado.*

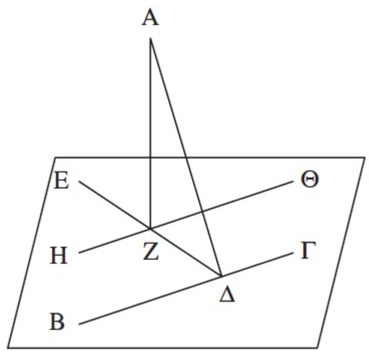
Demostración. Sea π el plano de referencia y A un punto elevado, en particular, $A \notin \pi$.
Queremos trazar una línea recta perpendicular al plano π desde A.
Trazamos al azar una recta $B\Gamma \in \pi$.
Por la Proposición 12, Libro I [8],trazamos desde A una recta $A\Delta$ verificando: $A\Delta \perp B\Gamma$ y $\Delta \in B\Gamma \ / \ A\Delta \cap B\Gamma = \{\Delta\}$.
Si $A\Delta \perp \pi$ ya estaría probado. Supongamos que no sucede.
La Proposición 11, Libro I [9] nos permite trazar desde $\Delta \in B\Gamma$ la recta ΔE verificando:

$$\measuredangle_{\pi}(\Delta E, B\Gamma) = 1\, recto.$$

[7]Proposición 33, Libro I: Las rectas que se unen por el mismo lado a rectas iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas.

[8]Proposición 12, Libro I: Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.

[9]Proposición 11, Libro I: Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.



Utilizando la Proposición 12, Libro I, trazamos, desde A, la recta AZ tal que:

$$AZ \perp \Delta E,\ AZ \cap \Delta E = \{Z\}.$$

Por la Proposición 31, Libro I [10] podemos trazar por el punto Z la recta $H\Theta$ / $H\Theta \parallel B\Gamma$. Tenemos, en virtud de la Proposición 2.4:

$$B\Gamma \perp \Delta A,\ B\Gamma \perp \Delta E \Rightarrow\ \exists \gamma\, plano \,/\, \Delta A, \Delta E \in \gamma,\ B\Gamma \perp \gamma,$$

y seguidamente, por la Proposición 2.8:

$$H\Theta \parallel B\Gamma,\ B\Gamma \perp \gamma \Rightarrow H\Theta \perp \gamma.$$

Ahora, como consecuencia de la Proposición 2.2:

$$\Delta A,\ \Delta E \in \gamma \Rightarrow \Delta A,\ \Delta Z \in \gamma \Rightarrow (triángulo)\Delta ZA \in \gamma \Rightarrow AZ \in \gamma.$$

Luego, por ser $H\Theta \perp \gamma$, teniendo en cuenta la Definición 1.3:

$$AZ \in \gamma,\ AZ \cap H\Theta = \{Z\} \Rightarrow H\Theta \perp ZA \Rightarrow ZA \perp H\Theta.$$

Como último paso de la prueba, por la Proposición 2.4 aplicada a las rectas AZ, HΘ, ΔE:

$$AZ \perp H\Theta,\ AZ \perp \Delta E \Rightarrow \exists \beta\, plano \,/\, H\Theta,\ \Delta E \in \beta,\ AZ \perp \beta,$$

pero entonces:

$$H\Theta,\ \Delta E \in \beta,\ H\Theta,\ \Delta E \in \pi \Rightarrow \beta = \pi$$

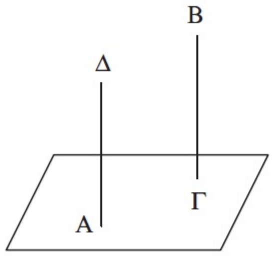
$$\beta = \pi,\ AZ \perp \beta \Rightarrow AZ \perp \pi.$$

Así, hemos trazado una recta AZ, perpendicular al plano π, desde el punto elevado A. □

[10] Proposición 31, Libro I: Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.

Proposición 2.12. *Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado en él.*

Demostración. Sean π el plano dado y $A \in \pi$.
Queremos encontrar una recta r / $A \in r$, $r \perp \pi$.
Consideramos un punto B elevado con respecto a π. La Proposición 2.11 nos permite trazar una recta $B\Gamma$ / $B\Gamma \perp \pi$.



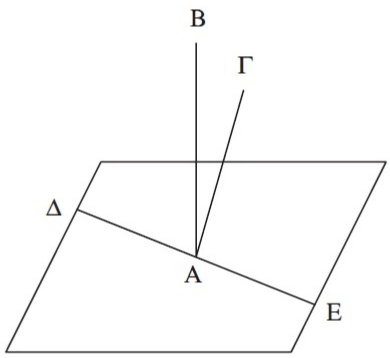
La Proposición 31, Libro I, nos permite trazar una recta $A\Delta$ / $A \in A\Delta$, $A\Delta \parallel B\Gamma$.
Para finalizar, por la Proposición 2.8:

$$A\Delta \parallel B\Gamma,\ B\Gamma \perp \pi \Rightarrow A\Delta \perp \pi.$$

Por tanto, $A\Delta$ es la recta deseada. □

Proposición 2.13. *No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.*

Demostración. Sea π el plano de referencia. Supongamos que es posible levantar por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.



Levantamos desde un punto $A \in \pi$, por el mismo lado, rectas AB, $A\Gamma$ verificando:

$$AB \perp \pi, \;\; A\Gamma \perp \pi \;\, y \;\, AB \neq A\Gamma.$$

$$AB \cap A\Gamma = \{A\} \Rightarrow \exists\, \gamma\, plano\, /\, AB, A\Gamma \in \gamma.$$

Por la Proposición 2.3: $\pi \cap \gamma{=}\Delta AE\,(recta)$.
Ahora, como consecuencia de la Proposición 2.4, tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma A \perp \pi \\ \Delta AE \in \pi \\ \Gamma A \cap \Delta AE = \{A\} \end{array}\right| \;\Rightarrow\;\; \measuredangle(\Gamma AE) = 1\, recto,$$

$$\left.\begin{array}{c} BA \perp \pi \\ \Delta AE \in \pi \\ BA \cap \Delta AE = \{A\} \end{array}\right| \;\Rightarrow\;\; \measuredangle(BAE) = 1\, recto.$$

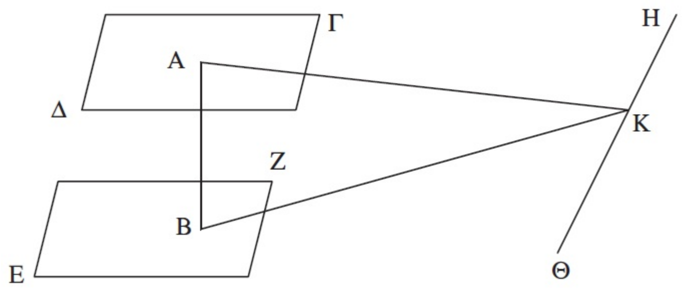
En resumen:

$$\Gamma A, BA, AE \in \gamma \;\, y \;\, \measuredangle(\Gamma AE) = 1\, recto = \measuredangle(BAE) \Rightarrow AB = A\Gamma.$$

Llegamos a una contradicción pues $AB \neq A\Gamma$, luego no se levantarán por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto. □

Proposición 2.14. *Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.*

Demostración. Sean $\Gamma\Delta$, EZ planos y AB recta / $AB \perp \Gamma\Delta$, $AB \perp EZ$.
Vamos a probar que $\Gamma\Delta \parallel EZ$.



Supongamos que no lo son, luego, por la Proposición 2.3: $\Gamma\Delta \cap EZ = H\Theta\,(recta)$.
Tomemos $K \in H\Theta$ arbitrario y trazamos las rectas AK, BK.

$$AB \perp EZ \Rightarrow \measuredangle(ABK) = 1\, recto.$$

$$AB \perp \Gamma\Delta \Rightarrow \measuredangle(BAK) = 1\,recto.$$

Considerando el triángulo ABK, tendrá dos ángulos rectos, luego:

$$\measuredangle(ABK) + \measuredangle(BAK) = 2\,rectos.$$

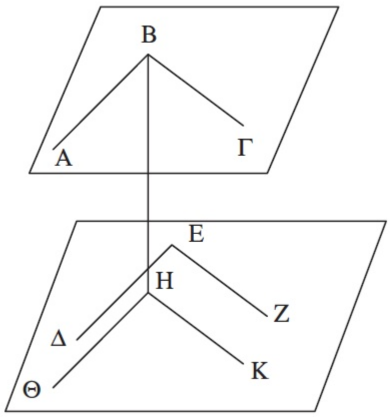
Llegamos a una contradicción con la Proposición 17, Libro I[11], entonces:

$$\Gamma\Delta \cap EZ = \emptyset \Rightarrow \Gamma\Delta \parallel EZ.$$

$\square$

Proposición 2.15. *Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.*

Demostración. Sean AB, $B\Gamma$, rectas / $AB \cap B\Gamma = \{B\}$; ΓE, EZ rectas / $\Gamma E \cap EZ = \{E\}$; y además: $AB \parallel \Delta E$, $B\Gamma \parallel EZ$.
Consideramos los planos π, γ / AB, $B\Gamma \in \pi$; $\Delta E, EZ \in \gamma$.
Queremos probar que $\pi \parallel \gamma$.



Por la Proposición 2.11, trazamos desde B la recta BH / $BH \perp \gamma$, $BH \cap \gamma = \{H\}$.
Seguidamente, por la Proposición 31, Libro I, trazamos por H las rectas $H\Theta$, HK verificando: $H\Theta \parallel E\Delta$, $HK \parallel EZ$.
Como consecuencia de la Definición 1.3:

$$BH \cap H\Theta = \{H\} = BH \cap HK \Rightarrow \measuredangle(BH\Theta) = 1\,recto = \measuredangle(BHK).$$

[11]Proposición 17, Libro I: En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores a dos rectos.

Por otra parte, por la Proposición 2.9:

$$BA \parallel E\Delta,\ E\Delta \parallel H\Theta \Rightarrow BA \parallel H\Theta,$$

$$B\Gamma \parallel EZ,\ EZ \parallel HK \Rightarrow B\Gamma \parallel HK,$$

y teniendo en cuenta que la recta BH incide sobre dichas paralelas, por la Proposición 29, Libro I:

$$\measuredangle(HBA) + \measuredangle(BH\Theta) = 2\,rectos,$$

$$\measuredangle(HB\Gamma) + \measuredangle(BHK) = 2\,rectos.$$

Pero,

$$\measuredangle(BH\Theta) = 1\,recto,\ \measuredangle(BHK) = 1\,recto \Rightarrow \measuredangle(HBA) = 1\,recto,\ \measuredangle(HB\Gamma) = 1\,recto.$$

Conocidos estos ángulos, por la Proposición 2.4:

$$\left.\begin{array}{c} \measuredangle(HB\Gamma) = 1\,recto = \measuredangle(HBA) \\ B\Gamma,\, BA \in \pi \\ HB \cap B\Gamma \cap BA = \{B\} \end{array}\right| \Rightarrow \quad HB \perp \pi.$$

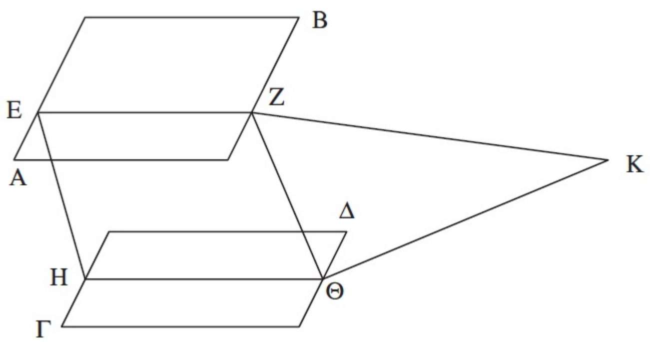
Para finalizar, por la Proposición 2.14:

$$HB \perp \gamma,\, HB \perp \pi \Rightarrow \gamma \parallel \pi.$$

□

Proposición 2.16. *Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ planos / $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB \cap EZH\Theta = EZ$, $\Gamma\Delta \cap EZH\Theta = H\Theta$. Queremos probar que $EZ \parallel H\Theta$.



Supongamos que no es cierto, luego las rectas EZ, $H\Theta$ se encontrarán en la dirección de Z, Θ, o en la de E, H.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se encuentran en la dirección de Z, Θ, luego: $EZ \cap H\Theta = \{K\}$, y sean EZK, $H\Theta$K las prolongaciones de las rectas EZ, $H\Theta$ hasta K.
Tenemos, por la Proposición 2.1:
$EZK \in AB$, $H\Theta K \in \Gamma\Delta$, en particular, $K \in AB$, $K \in \Gamma\Delta$.
Pero entonces:

$$K \in AB \cap \Gamma\Delta \Rightarrow AB \cap \Gamma\Delta \neq \emptyset,$$

de donde se sigue que los planos AB, $\Gamma\Delta$ no son paralelos contradiciendo una de las hipótesis de partida. Luego $EZ \parallel H\Theta$. □

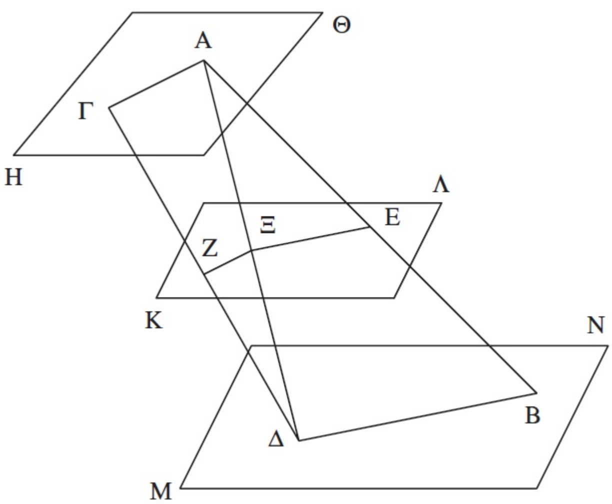
Proposición 2.17. *Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ rectas y $H\Theta$, $K\Lambda$, MN planos de forma que:

$$H\Theta \parallel K\Lambda,\ K\Lambda \parallel MN,$$

$$H\Theta \cap AB = \{A\},\ K\Lambda \cap AB = \{E\},\ MN \cap AB = \{B\},$$

$$H\Theta \cap \Gamma\Delta = \{\Gamma\},\ K\Lambda \cap \Gamma\Delta = \{Z\},\ MN \cap \Gamma\Delta = \{\Delta\}.$$



Queremos probar que, como la recta AE es a la recta EB, así, la recta ΓZ es a la recta $Z\Delta$, es decir:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}.$$

En primer lugar, trazamos las rectas $A\Gamma$, $B\Delta$, ΔA y definimos el punto Ξ como $\{\Xi\}=\mathrm{A}\Delta \cap \mathrm{K}\Lambda$. Continuamos trazando las rectas $E\Xi$, ΞZ.
Considerando los planos $K\Lambda$, MN, $EB\Delta\Xi$, por la Proposición 2.16:

$$\left.\begin{array}{r} K\Lambda \parallel MN \\ K\Lambda \cap EB\Delta\Xi = E\Xi \\ MN \cap EB\Delta\Xi = B\Delta \end{array}\right| \Rightarrow \quad E\Xi \parallel B\Delta,$$

y por el mismo resultado respecto a los planos $H\Theta$, $K\Lambda$, $A\Xi Z\Gamma$:

$$\left.\begin{array}{r} H\Theta \parallel K\Lambda \\ H\Theta \cap A\Xi Z\Gamma = A\Gamma \\ K\Lambda \cap A\Xi Z\Gamma = \Xi Z \end{array}\right| \Rightarrow \quad A\Gamma \parallel \Xi Z.$$

Ahora, considerando triángulo $AB\Delta$, por la Proposición 2, Libro VI[12]:

$$E\Xi \parallel B\Delta \ y \ B\Delta \in AB\Delta \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{A\Xi}{\Xi\Delta},$$

y anaálogamente para el triángulo $A\Delta\Gamma$:

$$\Xi Z \parallel A\Gamma \ y \ A\Gamma \in A\Delta\Gamma \Rightarrow \frac{A\Xi}{\Xi\Delta} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}.$$

Para finalizar, teniendo en cuenta la Proposición 11, Libro V[13]:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{A\Xi}{\Xi\Delta} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}.$$

Proporcionalmente, AE es a EB, como ΓZ a $Z\Delta$. □

Proposición 2.18. *Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.*

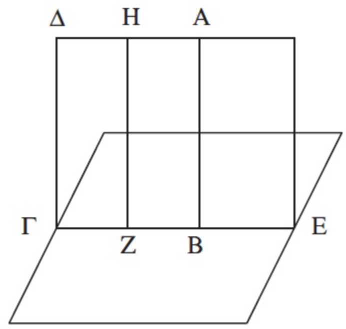
Demostración. Sean AB una recta y π un plano de forma que $\measuredangle(AB,\pi) = 1\,recto$.
Queremos probar que:

$$\pi \perp \gamma, \ \forall\gamma \ plano \,/\, AB \in \gamma.$$

Trazamos el plano ΔE / $AB \in \Delta E$, y sea $\Gamma E = \Delta E \cap \pi$, la sección común de ambos planos.

[12]Proposición 2, Libro VI: Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo, y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

[13]Proposición 11, Libro V: Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.



Tomamos $Z \in \Gamma E$ arbitrario. La Proposición 2.11 nos permite trazar, desde Z, la recta ZH tal que: $\measuredangle_{\Delta E}(ZH, \Gamma E) = 1\, recto$. Como consecuencia de la Definición 1.3:

$$AB \cap \Gamma E = \{B\},\ \Gamma E \in \pi \Rightarrow \measuredangle(AB, \Gamma E) = 1\, recto \Rightarrow \measuredangle(ABZ) = 1\, recto,$$

$$HZ \cap \Gamma E = \{Z\},\ \Gamma E \in \pi \Rightarrow \measuredangle(HZ, \Gamma E) = 1\, recto \Rightarrow \measuredangle(HZB) = 1\, recto.$$

Seguidamente, por la Proposición 28, Libro I:

$$\left.\begin{array}{c} \measuredangle(ABZ) + \measuredangle(HZB) = 2\, rectos \\ \Gamma E \cap HZ \neq \emptyset \\ \Gamma E \cap AB \neq \emptyset \end{array}\right| \Rightarrow \quad AB \parallel ZH,$$

y en base a la Proposición 2.8:

$$\measuredangle(AB, \pi) = 1\, recto,\ ZH \parallel AB \Rightarrow \measuredangle(ZH, \pi) = 1\, recto.$$

Recapitulando, y teniendo en cuenta la Definición 1.4:

$$\left.\begin{array}{c} ZH \in \Delta E \\ \measuredangle(ZH, \Gamma E) = 1\, recto \\ \measuredangle(ZH, \pi) = 1\, recto \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad \Delta E \perp \pi,$$

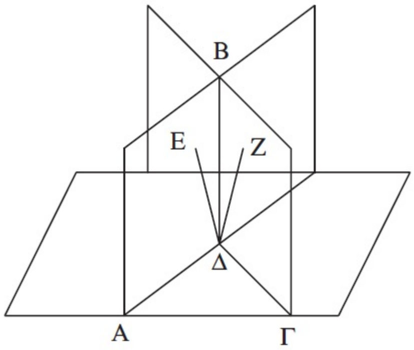
y como ΔE plano arbitrario en las hipótesis dadas, se concluye la prueba. □

Proposición 2.19. *Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.*

Demostración. Sean π el plano de referencia y AB, $B\Gamma$ planos verificando:

$$\measuredangle(AB, \pi) = 1\, recto,\ \measuredangle(B\Gamma, \pi) = 1\, recto\ y\ AB \cap B\Gamma = B\Delta\, (recta).$$

Comprobemos que $\measuredangle(B\Delta, \pi) = 1\, recto$.
Supongamos que no es cierto y tracemos desde el punto Δ las rectas ΔE, ΔZ de forma



que: $\Delta E \in AB$, $\Delta Z \in B\Gamma$ y $\measuredangle(\Delta E, A\Delta) = 1\,recto$, $\measuredangle(\Delta Z, \Delta C) = 1\,recto$.
Ahora bien, por la Definición 1.4:

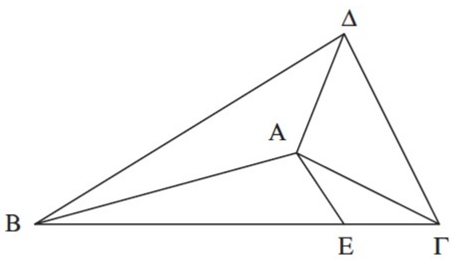
$$\left.\begin{array}{r} AB \perp \pi \\ \Delta E \in AB \\ \measuredangle(\Delta E, A\Delta) = 1\,recto \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta E \perp \pi,$$

$$\left.\begin{array}{r} \Gamma\Delta \perp \pi \\ \Delta Z \in AB \\ \measuredangle(\Delta Z, A\Gamma) = 1\,recto \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta Z \perp \pi,$$

lo cual es imposible por la Proposición 2.13, luego no se levantará otra recta desde el punto Δ formando ángulos rectos con el plano π a excepción de ΔB, sección común de AB y $B\Gamma$. □

Proposición 2.20. *Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.*

Demostración. Sea el ángulo sólido correspondiente a A comprendido por los ángulos planos: $\measuredangle(BA\Gamma)$, $\measuredangle(\Gamma A\Delta)$, $\measuredangle(\Delta AB)$.
Queremos probar que dos cualesquiera de dichos ángulos, tomados juntos, son mayores que el restante.



Si $\measuredangle(BA\Gamma) = \measuredangle(\Gamma A\Delta) = \measuredangle(\Delta AB)$, el resultado resulta trivial.

De otra forma, supongamos: $\measuredangle(BA\Gamma) > \measuredangle(\Gamma A\Delta)$, $\measuredangle(BA\Gamma) > \measuredangle(\Delta AB)$.
Construimos sobre la recta AB, en el punto A, $\measuredangle(BAE)/\ \measuredangle(BAE) = \measuredangle(\Delta AB)$, dicho ángulo en el plano que pasa a través de $BA\Gamma$.
Consideremos $AE = A\Delta$ y sea $BE\Gamma$ recta / $BE\Gamma \cap AB = \{B\}$, $BE\Gamma \cap A\Gamma = \{\Gamma\}$. Trazamos ΔB y $\Delta\Gamma$.
En primer lugar, con respecto a los triángulos ΔAB, $BA\Gamma$, por la Proposición 4, Libro I:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta A = AE \\ \measuredangle(\Delta AB) = \measuredangle(BAE) \\ AB \textit{ lado común a ambos} \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)\Delta B = (base)BE.$$

Trabajamos ahora con el triángulo $B\Delta\Gamma$. La Proposición 20, Libro I[14] nos permite afirmar que:

$$B\Delta + \Delta\Gamma > B\Gamma,$$

pero $B\Delta = BE$, así,

$$BE + \Delta\Gamma > B\Gamma \Rightarrow \Delta\Gamma > B\Gamma - BE = E\Gamma \Rightarrow \Delta\Gamma > E\Gamma,$$

y teniendo en cuenta la Proposición 25, Libro I[15], con respecto a los triángulos $\Delta A\Gamma$, $EA\Gamma$:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta A = AE \\ A\Gamma \textit{ lado común a ambos} \\ (base)\Delta\Gamma > (base)E\Gamma \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(\Delta A\Gamma) > \measuredangle(EA\Gamma).$$

Pero ya vimos que $\measuredangle(\Delta AB) = \measuredangle(EA\Gamma)$, luego:

$$\measuredangle(BA\Gamma) = \measuredangle(BAE) + \measuredangle(EA\Gamma) < \measuredangle(\Delta AB) + \measuredangle(\Delta A\Gamma).$$

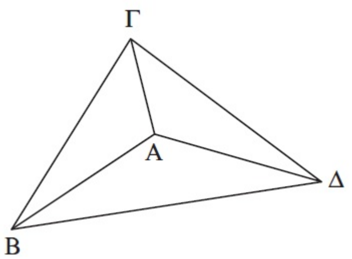
De manera semejante se prueba para los demás ángulos. $\square$

[14] Proposición 20, Libro I: En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

[15] Proposición 25, Libro I: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrá el ángulo comprendido por rectas iguales del uno mayor que el otro.

Proposición 2.21. *Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.*

Demostración. [16] Sea el ángulo sólido definido en el punto A por $\{\measuredangle(BA\Gamma), \measuredangle(\Gamma A\Delta), \measuredangle(\Delta AB)\}$.



Queremos probar que:

$$\measuredangle(BA\Gamma) + \measuredangle(\Gamma A\Delta) + \measuredangle(\Delta AB) < 4\,rectos.$$

Tomamos al azar los puntos $B \in AB$, $\Gamma \in A\Gamma$, $\Delta \in A\Delta$, y trazamos las rectas $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔB.

Los ángulos sólidos correspondientes a los puntos B, Γ, Δ vienen dados, respectivamente, por: $\{\measuredangle(\Gamma BA), \measuredangle(AB\Delta), \measuredangle(\Gamma B\Delta)\}$, $\{\measuredangle(B\Gamma A), \measuredangle(A\Gamma\Delta), \measuredangle(B\Gamma\Delta)\}$, $\{\measuredangle(\Gamma\Delta A), \measuredangle(A\Delta B), \measuredangle(\Gamma\Delta B)\}$.

La Proposición 2.20 nos garantiza que:

$$\measuredangle(\Gamma BA) + \measuredangle(AB\Delta) > \measuredangle(\Gamma B\Delta),$$

$$\measuredangle(B\Gamma A) + \measuredangle(A\Gamma\Delta) > \measuredangle(B\Gamma\Delta),$$

$$\measuredangle(\Gamma\Delta A) + \measuredangle(A\Delta B) > \measuredangle(\Gamma\Delta B).$$

De esta forma:

$$\measuredangle(\Gamma BA)+\measuredangle(AB\Delta)+\measuredangle(B\Gamma A)+\measuredangle(A\Gamma\Delta)+\measuredangle(\Gamma\Delta A)+\measuredangle(A\Delta B) > \measuredangle(\Gamma B\Delta)+\measuredangle(B\Gamma\Delta)+\measuredangle(\Gamma\Delta B).$$

Aún más, por la Proposición 32, Libro I[17], en relación al triángulo $B\Gamma\Delta$:

$$\measuredangle(\Gamma B\Delta) + \measuredangle(B\Gamma\Delta) + \measuredangle(\Gamma\Delta B) = 2\,rectos,$$

entonces:

$$\measuredangle(\Gamma BA) + \measuredangle(AB\Delta) + \measuredangle(B\Gamma A) + \measuredangle(A\Gamma\Delta) + \measuredangle(\Gamma\Delta A) + \measuredangle(A\Delta B) > 2\,rectos.$$

[16] Euclides formula este resultado de manera genérica pero la prueba se limita al caso particular del ángulo triedro.

[17] Proposición 32, Libro I: En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

Volvemos a recurrir a dicha proposición considerando los triángulos $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ y $A\Delta B$:

$$\underbrace{\underbrace{\measuredangle(\Gamma BA)+\measuredangle(A\Gamma B)+\measuredangle(BA\Gamma)}_{2\,rectos}+\underbrace{\measuredangle(A\Gamma\Delta)+\measuredangle(\Gamma\Delta A)+\measuredangle(\Gamma A\Delta)}_{2\,rectos}+\underbrace{\measuredangle(A\Delta B)+\measuredangle(\Delta BA)+\measuredangle(BA\Delta)}_{2\,rectos}}_{6\,rectos}$$

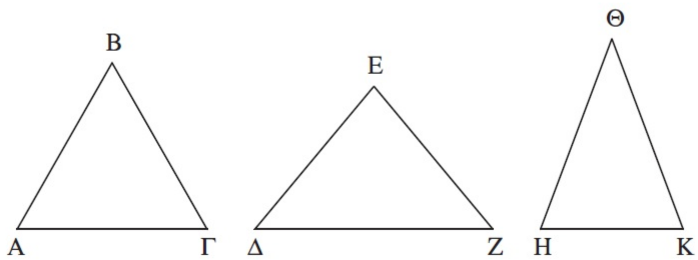
que junto a la desigualdad anterior nos lleva a que:

$$\measuredangle(BA\Gamma)+\measuredangle(\Gamma A\Delta)+\measuredangle(\Delta AB)<4\,rectos.$$

□

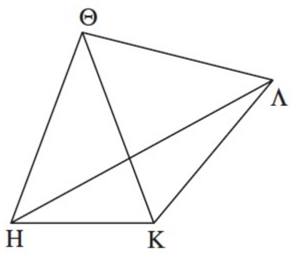
Proposición 2.22. *Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las rectas que unen los extremos de las rectas iguales.*

Demostración. Sean $\measuredangle(AB\Gamma), \measuredangle(\Delta EZ), \measuredangle(H\Theta K)$ ángulos planos de forma que dos tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK rectas / $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$.
Trazamos las rectas $A\Gamma$, ΔZ, HK.



Queremos probar que es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a $A\Gamma$, ΔZ, HK, es decir, que dos cualesquiera de las rectas $A\Gamma$, ΔZ, HK son mayores que la restante.
Si $\measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(\Delta EZ) = \measuredangle(H\Theta K)$, luego, $A\Gamma = \Delta Z = HK$ y es posible construir un triángulo a partir de las rectas iguales $A\Gamma$, ΔZ, HK.

Supongamos pues que son desiguales. En primer lugar consideramos, en la recta ΘK, en el punto Θ, $\measuredangle(K\Theta\Lambda)/\measuredangle(K\Theta\Lambda) = \measuredangle(AB\Gamma)$, y trazamos $\Theta\Lambda/\ \Theta\Lambda = AB$. Seguidamente construimos $K\Lambda$ y $H\Lambda$.



Teniendo en cuenta los triángulos $AB\Gamma$, $K\Theta\Lambda$, por la Proposición 4, Libro I:

$$\left.\begin{array}{r} AB = K\Theta \\ B\Gamma = \Theta\Lambda \\ \measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(K\Theta\Lambda) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)A\Gamma = (base)K\Lambda.$$

Por otra parte:

$$\left\{\begin{array}{c} \measuredangle(AB\Gamma) + \measuredangle(H\Theta K) > \measuredangle(\Delta EZ) \\ \measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(K\Theta\Lambda) \end{array}\right.$$

luego:

$$\measuredangle(K\Theta\Lambda) + \measuredangle(H\Theta K) > \measuredangle(\Delta EZ) \Rightarrow \measuredangle(H\Theta\Lambda) > \measuredangle(\Delta EZ),$$

y con respecto a los triángulos $H\Theta\Lambda$, ΔEZ, por la Proposición 24, Libro I[18],

$$\left.\begin{array}{r} H\Theta = \Delta E \\ \Theta\Lambda = EZ \\ \measuredangle(H\Theta\Lambda) > \measuredangle(\Delta EZ) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)H\Lambda > (base)\Delta Z.$$

Pero, como $HK\Theta$ es un triángulo, por la Proposición 20, Libro I:

$$HK + K\Lambda > H\Lambda > \Delta Z$$

y, además, $K\Lambda = A\Gamma$, luego:

$$A\Gamma + HK > \Delta Z.$$

De manera semejante se prueba que:

$$A\Gamma + \Delta Z > HK, \;\; \Delta Z + HK > A\Gamma.$$

□

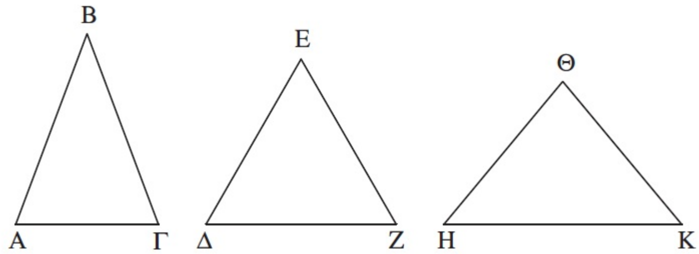
[18]Proposición 24, Libro I: Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que el otro.

Proposición 2.23. *Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.*

Demostración. Sean $\measuredangle(AB\Gamma)$, $\measuredangle(\Delta EZ)$, $\measuredangle(HK\Theta)$ ángulos planos dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, siendo además:

$$\measuredangle(AB\Gamma) + \measuredangle(\Delta EZ) + \measuredangle(HK\Theta) < 4\, rectos.$$

Queremos construir un ángulo sólido a partir de ángulos iguales a $AB\Gamma$, ΔEZ, $H\Theta K$.



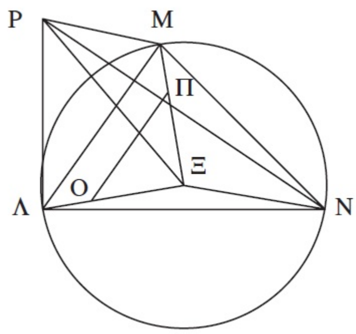
Tomamos las rectas AB, $B\Gamma$, ΔE, EZ, $H\Theta$, ΘK de forma que:

$$AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K.$$

Por la Proposición 2.22, sea ΛMN triángulo de manera que:

$$\Lambda M = A\Gamma,\ MN = \Delta Z,\ N\Lambda = HK.$$

Circunscribamos el triángulo ΛMN en el círculo ΛMN, sea Ξ su centro y tracemos las rectas $\Lambda\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$.



Comprobemos, en primer lugar, que $AB > \Lambda\Xi$. En caso de no ser cierto, $AB = \Lambda\Xi$ o

$AB < \Lambda\Xi$.
Si $AB = \Lambda\Xi$, tenemos $AB = B\Gamma$ y $\Xi\Lambda = \Xi M$ (pues son radios del círculo), y por la Proposición 8, Libro I, dados los triángulos $AB\Gamma$, $\Lambda\Xi M$:

$$\left.\begin{array}{r} AB = \Lambda\Xi \\ B\Gamma = \Xi M \\ (base)A\Gamma = (base)\Lambda M \end{array}\right| \Rightarrow \ \measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(\Lambda\Xi M).$$

Por la misma razón, ya que consideramos iguales todas las rectas iniciales,

$$\measuredangle(\Delta EZ) = \measuredangle(M\Xi N),\ \measuredangle(H\Theta K) = \measuredangle(N\Xi\Lambda),$$

con lo que:

$$\measuredangle(AB\Gamma) + \measuredangle(\Delta EZ) + \measuredangle(H\Theta K) = \measuredangle(\Lambda\Xi M) + \measuredangle(M\Xi N) + \measuredangle(N\Xi\Lambda) = {}^{19} 4\, rectos.$$

Pero, por hipótesis,

$$\measuredangle(AB\Gamma) + \measuredangle(\Delta EZ) + \measuredangle(H\Theta K) < 4\, rectos.$$

Llegamos a una contradicción, luego $AB \neq \Lambda\Xi$.
Si $AB < \Lambda\Xi$, tomamos $O \in A\Xi \ / \ \Xi O = AB$; $\Pi \in \Xi M \ / \ \Xi\Pi = B\Gamma$, y trazamos $O\Pi$.

$$AB = B\Gamma \Rightarrow \Xi O = \Xi\Pi$$

y,

$$\Xi\Lambda = \Xi M \Rightarrow \Xi\Lambda - \Xi O = \Xi M - \Xi\Pi \Rightarrow \Lambda O = M\Pi.$$

Ahora,

$$\Xi O = \Xi\Pi \ y \ \Lambda O = M\Pi \Rightarrow \frac{\Xi O}{\Lambda O} = \frac{\Xi\Pi}{M\Pi},$$

y por la Proposición 2, Libro VI: $\Lambda M \parallel O\Pi$.
Proseguimos considerando los triángulos $\Lambda M\Xi$, $O\Pi\Xi$. La Proposición 29, Libro I, nos permite garantizar que son equiángulos, y por la Proposición 4, Libro VI[20]:

$$\frac{\Xi\Lambda}{\Lambda M} = \frac{\Xi O}{O\Pi}.$$

Por la Proposición 16, Libro V[21],

$$\frac{\Xi\Lambda}{\Xi O} = \frac{\Lambda M}{O\Pi}.$$

[19] $\measuredangle(\Lambda\Xi M)$, $\measuredangle(M\Xi N)$, $\measuredangle(N\Xi\Lambda)$ recorren todo el círculo.

[20] Proposición 4, Libro VI: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales, y los ángulos que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

[21] Proposición 16, Libro V: Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

Pero,

$$\Lambda\Xi > \Xi O \quad \Rightarrow \quad \Lambda M > O\Pi \quad \Rightarrow \quad A\Gamma > O\Pi.$$
$$\Lambda M = A\Gamma$$

Tomando los triángulos $AB\Gamma$, $O\Xi\Pi$, por la Proposición 25, Libro I:

$$\left.\begin{array}{r} AB = O\Xi \\ B\Gamma = \Xi\Pi \\ (base)A\Gamma > (base)O\Pi \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(AB\Gamma) = \measuredangle(O\Xi\Pi),$$

y como $O\Xi\Pi$, $\Lambda\Xi M$ son equiángulos:

$$\measuredangle(AB\Gamma) > \measuredangle(\Lambda\Xi M).$$

De forma semejante comprobaríamos que:

$$\measuredangle(\Delta EZ) > \measuredangle(M\Xi N),\ \measuredangle(H\Theta K) > \measuredangle(N\Xi\Lambda)$$

En conclusión,

$$4 > \measuredangle(AB\Gamma) + \measuredangle(\Delta EZ) + \measuredangle(H\Theta K) > \measuredangle(\Lambda\Xi M) + \measuredangle(M\Xi N) + \measuredangle(N\Xi\Lambda) = 4,$$

llegando a una contradicción, luego $AB > \Lambda\Xi$.

En segundo lugar, levantamos desde el punto Ξ la recta $\Xi P / \measuredangle(\Xi P, \gamma) = 1\, recto$, siendo $\gamma\, plano\, /\ \Lambda MN \in \gamma$, y sea:

$$\Xi P \times \Xi P = AB \times AB - \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi,$$

posible gracias al Lema que enunciamos al final de esta demostración.
Trazamos las rectas $P\Lambda$, PM, PN, de manera que:

$$\measuredangle(P\Xi, \gamma) = 1\, recto \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \measuredangle(P\Xi\Lambda) = 1\, recto \\ \measuredangle(P\Xi M) = 1\, recto \\ \measuredangle(P\Xi N) = 1\, recto \end{array}\right.$$

y por la Proposición 4, Libro I, en base a los triángulos $\Lambda\Xi P$, ΞMP,

$$\left.\begin{array}{c} \Lambda\Xi = \Xi M \\ \Xi P\ lado\ común\ a\ ambos \\ \measuredangle(\Lambda\Xi P) = 1\, recto \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)P\Lambda = (base)PM.$$

Por el mismo argumento aplicado a los triángulos $\Lambda\Xi P$, ΞPN,

$$PN = P\Lambda = PM.$$

Ahora,

$$\Xi P \times \Xi P = AB \times AB - \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi \Rightarrow AB \times AB = \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi + \Xi P \times \Xi P,$$

y como $\measuredangle(\Lambda\Xi P) = 1\,recto$, por la Proposición 47, Libro I[22]: $\Lambda P \times \Lambda P = \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi + \Xi P \times \Xi P$,

$$\begin{cases} AB \times AB = \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi + \Xi P \times \Xi P, \\ \Lambda P \times \Lambda P = \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi + \Xi P \times \Xi P \end{cases}$$

luego,

$$AB \times AB = \Lambda P \times \Lambda P \Rightarrow AB = \Lambda P.$$

Entonces,

$$PN = PM = P\Lambda = AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K.$$

Para finalizar, por la Proposición 8, Libro I, aplicada a los triángulos ΛPM, $AB\Gamma$:

$$\left.\begin{array}{r} \Lambda P = AB \\ PM = B\Gamma \\ (base)\Lambda M = (base)A\Gamma \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(\Lambda PM) = \measuredangle(AB\Gamma).$$

Por el mismo proceder,

$$\measuredangle(MPN) = \measuredangle(\Delta EZ), \ \measuredangle(\Lambda PN) = \measuredangle(H\Theta K).$$

En conclusión, a partir de los tres ángulos planos ΛPM, MPN, ΛPN, iguales a los dados, se ha construido el ángulo sólido correspondiente a P. $\square$

Lema. *Demostramos como sigue de que manera se puede tomar el cuadrado ΞP igual al área en la que el cuadrado AB es mayor que el cuadrado $\Lambda\Xi$.*

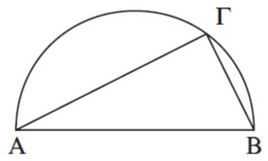
Demostración. Sean AB, $\Lambda\Xi$ rectas / $AB > \Lambda\Xi$.
Describimos sobre AB el semicírculo $AB\Gamma$, y adaptamos, por la Proposición 1, Libro IV[23], al semicírculo $AB\Gamma$, la recta $A\Gamma$ / $A\Gamma = \Lambda\Xi$, que no sea mayor que el diámetro AB. Trazamos ΓB.
$AB\Gamma$ es un triángulo inscrito en el semiciírculo $A\Gamma B$, por la Proposición 31, Libro III[24], $\measuredangle(A\Gamma B) = 1\,recto$, y por la Proposición 47, Libro I:

$$AB \times AB = A\Gamma \times A\Gamma + \Gamma B \times \Gamma B,$$

[22]Proposición 47, Libro I: En los triángulos rectángulos, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

[23]Proposición 1, Libro IV: Adaptar a un círculo dado una recta igual a una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.

[24]Proposición 31, Libro III: En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el ángulo en el segmento mayor es menor que un recto, el ángulo en el segmento menor es mayor que un recto, y además, el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto.



luego,

$$AB \times AB > A\Gamma \times A\Gamma - \Gamma B \times \Gamma B.$$

Como AΓ=ΛΞ:

$$AB \times AB > \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi - \Gamma B \times \Gamma B.$$

Para finalizar, tomando la recta ΞP con $\Xi P = BC$,

$$AB \times AB > \Lambda\Xi \times \Lambda\Xi - \Xi P \times \Xi P.$$

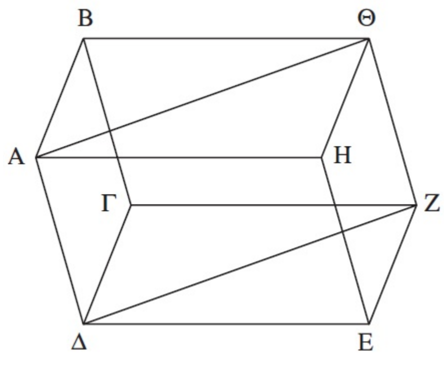
□

Proposición 2.24. *Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.*

Demostración. Sea ΓΔΘΗ el sólido comprendido por los planos $A\Gamma$, HZ, $A\Theta$, ΔZ, BZ, AE, tales que:

$$A\Gamma \parallel HZ, \; A\Theta \parallel \Delta Z, \; BZ \parallel AE.$$

Decimos que sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.



Primero comprobemos que son paralelogramos. Por la Proposición 2.16:

$$\left.\begin{array}{r} BH \parallel \Gamma E \\ A\Gamma \cap BH = AB(recta) \\ \Gamma E \cap A\Gamma = \Delta\Gamma(recta) \end{array}\right| \Rightarrow \quad AB \parallel \Delta\Gamma,$$

$$\left.\begin{array}{r} BZ \parallel AE \\ BZ \cap A\Gamma = B\Gamma(recta) \\ AE \cap A\Gamma = A\Delta(recta) \end{array}\right| \Rightarrow \quad B\Gamma \parallel A\Delta,$$

de donde se sigue que $A\Gamma$ es un paralelogramo.
De manera semejante se comprueba que cada uno de los planos ΔZ, ZH, HB, BZ, AE es un paralelogramo.

En segundo lugar, comprobemos que los planos opuestos son iguales, es decir, $BH = \Gamma E$, $A\Gamma = HZ$, $AE = BZ$.
Trazamos las rectas $A\Theta$. Por la Proposición 2.10 tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} AB \cap B\Theta = \{B\},\ \Delta\Gamma \cap \Gamma Z = \{\Gamma\} \\ AB \parallel \Delta E,\ B\Theta \parallel \Gamma Z \\ AB, B\Theta \in A\Theta,\ \Delta\Gamma, \Gamma Z \in \Delta Z,\ \Delta Z \neq A\Theta \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(AB\Theta) = \measuredangle(\Delta\Gamma Z).$$

Ahora, considerando los paralelogramos $A\Gamma$, BZ, por la Proposición 34, Libro I[25],

$$AB = \Delta\Gamma,\ B\Theta = \Gamma Z$$

Conocido lo anterior, podemos aplicar la Proposición 4, Libro I, a los triángulos $AB\Theta$, $\Delta\Gamma Z$,

$$\left.\begin{array}{r} AB = \Delta\Gamma \\ B\Theta = \Gamma Z \\ \measuredangle(AB\Theta) = \measuredangle(\Delta\Gamma Z) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)A\Theta = (base)\Delta Z \Rightarrow AB\Theta = \Delta\Gamma Z.$$

Para finalizar, por la Proposición 34, Libro I, respecto a los paralelogramos BH, ΓE, y los triángulos $AB\Theta$, $\Delta\Gamma Z$,

$$BH = 2 \times AB\Theta \ y \ \Gamma E = 2 \times \Delta\Gamma Z \Rightarrow BH = \Gamma E.$$

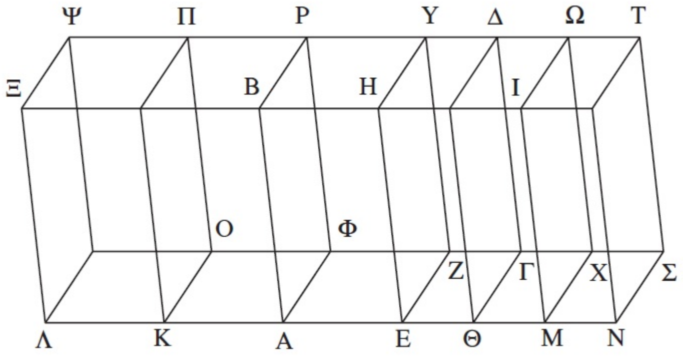
Por un razonamiento similar, $A\Gamma = HZ$ y $AE = BZ$. □

Proposición 2.25. *Si un sólido paraleleípedo*[26] *es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido.*

Demostración. Sean $AB\Gamma\Delta$ paralelepípedo y ZH un plano verificando :

$$ZH \cap AB\Gamma\Delta \neq \emptyset,\ ZH \parallel PA,\ ZH \parallel \Delta\Theta.$$

[25]Proposición 34, Libro I: En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.
[26]Llamaremos sólido paralelepípedo a aquel comprendido por seis planos paralelos dos a dos.



Decimos que la base $AEZ\Phi$ es a la base $E\Theta\Gamma Z$, así el sólido $ABZY$ es al sólido $EH\Gamma\Delta$, es decir,

$$\frac{AEZ\Phi}{E\Theta\Gamma Z} = \frac{ABZY}{EH\Gamma\Delta}.$$

Prolongamos $A\Theta$ por cada lado, trazamos un número cualquiera de rectas AK, $K\Lambda$ / $AK = AE = K\Lambda$ y un número cualquiera de rectas ΘM, MN / $\Theta M = E\Theta = MN$.
Completamos los paralelogramos ΛO, $K\Phi$, ΘX, $M\Sigma$, y los sólidos $\Lambda\Pi$, KP, ΔM, MT.
Se verifica:

$$\Lambda K = KA = AE \Rightarrow \Lambda O = K\Phi = AZ \text{ } y \text{ } K\Xi = KB = AH,$$

y, por la Proposición 2.24, $\Lambda\Psi = K\Pi = AP$, pues son planos paralelos y opuestos de un sólido.
Análogamente,

$$E\Theta = \Theta M = MN \Rightarrow E\Gamma = \Theta X = M\Sigma \text{ } y \text{ } \Theta H = \Theta I = NI.$$

y por la Proposición 2.24, $\Delta\Theta = M\Omega = NT$.
Conocida esta información, por la Definición 1.10 deducimos que:

$$\Lambda\Pi = KP = AY, \; E\Delta = \Delta M = MT \; (\textit{sólidos}).$$

En consecuencia: cuantas veces las bases ΛZ, NZ, son múltiplos de las bases AZ, $Z\Theta$, tantas son múltiplos los sólidos ΛY, NY, de los sólidos AY, ΘY, respectivamente, es decir:

$$\frac{\Lambda Z}{AZ} = \frac{\Lambda Y}{AY}, \; \frac{NZ}{Z\Theta} = \frac{NY}{\Theta Y}.$$

Entonces, habiendo cuatro magnitudes, dos bases AZ y $Z\Theta$ y dos sólidos AY e $Y\Theta$,

$$\frac{\Lambda Z}{\Lambda Y} = \frac{AZ}{AY}, \; \frac{\Theta Z}{\Theta Y} = \frac{NZ}{NY},$$

y en base a dichas relaciones,

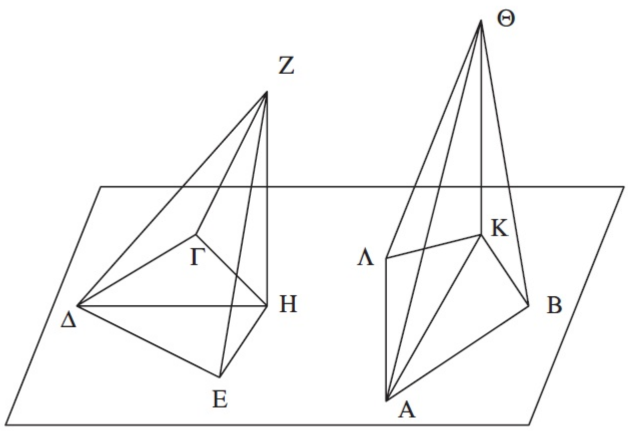
si (base)$\Lambda Z = (base) NZ \Rightarrow \Lambda Y = NY$,

si (base)$\Lambda Z > (base) NZ \Rightarrow \Lambda Y > NY$, y viceversa.

Por consiguiente, en base a la Definición 5, Libro V[27], como la base AZ es a la base $Z\Theta$, el sólido AY es al sólido $Y\Theta$. □

Proposición 2.26. *Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.*

Demostración. Sean AB una recta, $A \in AB$ un punto arbitrario y $\measuredangle_\Delta(E\Delta\Gamma, E\Delta Z, Z\Delta\Gamma)$ el ángulo sólido correspondiente a Δ.
Tenemos que construir un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Δ sobre la recta AB en su punto A.



Tomamos $Z \in \Delta Z$, arbitrario. Trazamos la recta HZ, conforme a la Proposición 2.11, de forma que:

$$Z \in ZH \; y \; ZH \perp \pi, \;\; \pi \, plano \, / \, E\Delta, \Delta\Gamma \in \pi.$$

$ZH \cap \pi = \{H\}$.Trazamos la recta ΔH.
Construimos sobre la recta AB, en el punto A,

$$\measuredangle(BA\Lambda), \, \measuredangle(BAK) \, / \, \measuredangle(BA\Lambda) = \measuredangle(E\Delta\Gamma), \, \measuredangle(BAK) = \measuredangle(E\Delta H)$$

[27]Definición 5, Libro V: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

gracias a la Proposición 23, Libro I[28].
Tomamos $AK = \Delta H$. Levantamos, por la Proposición 2.12, desde el punto K la recta $K\Theta$ verificando: $\measuredangle(K\Theta, \gamma) = 1, recto,\ \gamma\, plano\,/\,BA, A\Lambda \in \gamma$. Tomamos $K\Theta = HZ$ y trazamos ΘA.
Queremos ver que :

$$\measuredangle_A(BA\Lambda, BA\Theta, \Theta A\Lambda) = \measuredangle_\Delta(E\Delta\Gamma, E\Delta Z, Z\Delta\Gamma).$$

Tomamos $AB = \Delta E$ y trazamos ΘB, KB, ZE, HE. Tenemos, como consecuencia de la Definición 1.3:

$$ZH \perp \pi \Rightarrow \measuredangle(ZH\Delta) = 1\, recto = \measuredangle(ZHE),$$

$$\Theta K \perp \gamma \Rightarrow \measuredangle(\Theta KA) = 1\, recto = \measuredangle(\Theta KB).$$

Ahora, respecto a los triángulos KAB, $H\Delta E$, por la Proposición 4, Libro I:

$$\left.\begin{array}{c} KA = H\Delta \\ AB = \Delta E \\ \measuredangle(KAB) = \measuredangle(H\Delta E) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)KB = (base)HE,$$

y por la misma proposición a los triángulos $K\Theta A$, ΔHZ:

$$\left.\begin{array}{c} K\Theta = HZ \\ BK = HE \\ \measuredangle(AK\Theta) = \measuredangle(\Delta HZ) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)A\Theta = (base)Z\Delta.$$

Para finalizar, por la Proposición 8, Libro I, respecto a los triángulos ΘAB, ΔZE:

$$\left.\begin{array}{c} \Theta A = \Delta Z \\ AB = \Delta E \\ (base)\Theta B = (base)ZE \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(BA\Theta) = \measuredangle(E\Delta Z).$$

Por un razonamiento semejante:

$$\measuredangle(\Theta A\Lambda) = \measuredangle(Z\Delta\Gamma),\ \measuredangle(BA\Lambda) = \measuredangle(E\Delta\Gamma),$$

y se concluye:

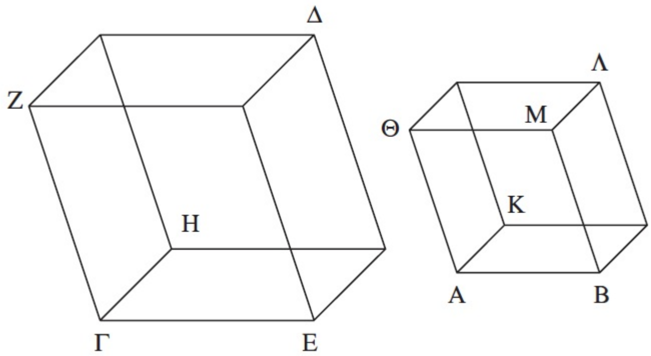
$$\measuredangle_A(BA\Lambda, BA\Theta, \Theta A\Lambda) = \measuredangle_\Delta(E\Delta\Gamma, E\Delta Z, Z\Delta\Gamma).$$

□

[28] Proposición 23, Libro I: Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Proposición 2.27. *Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.*

Demostración. Sean AB un recta dada y $\Gamma\Delta$ el sólido paralelepípedo dado. Tenemos que trazar sobre la recta AB un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante al sólido paralelepípedo dado $\Gamma\Delta$.



Construimos, por la Proposición 2.26, en el punto $A \in AB$ un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Γ, a saber: $\measuredangle_A(BA\Theta, \Theta AK, KAB)$, de modo que:

$$\measuredangle(BA\Theta) = \measuredangle(E\Gamma Z),\ \measuredangle(BAK) = \measuredangle(E\Gamma H)\ \measuredangle(KA\Theta) = \measuredangle(H\Gamma Z).$$

Por la Proposición 12, Libro VI[29],las rectas a partir de las cuales construimos el ángulo tendrán, con respecto a las rectas que definen el ángulo sólido Γ, la siguiente relación:

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{BA}{AK};\ \frac{H\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{KA}{A\Theta},$$

y por la Proposición 22, Libro V[30],

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{BA}{AK}\ y\ H\Gamma = \frac{KA}{A\Theta} \times \Gamma Z \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{BA}{A\Theta}.$$

Completamos el paralelogramo ΘB y el sólido $A\Lambda$. Por la Proposición 18, Libro VI[31], teniendo en cuenta los paralelogramos HE, KB:

$$\measuredangle(E\Gamma H) = \measuredangle(BAK),\ \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{BA}{AK} \Rightarrow HE\ semejante\ a\ KB.$$

[29]Proposición 12, Libro VI: Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional.

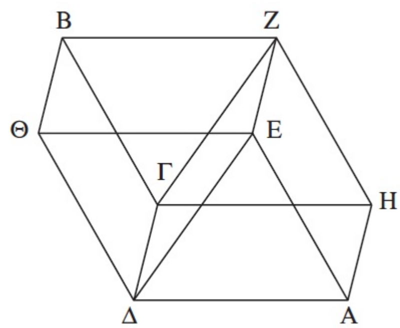
[30]Proposición 22, Libro V: Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.

[31]Proposición 18, Libro VI: A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.

Por un razonamiento análogo, $K\Theta$ semejante a HZ y ZE semejante a ΘB.
Tenemos tres paralelogramos del sólido $\Gamma\Delta$ semejantes a tres paralelogramos del sólido $A\Lambda$. La Proposición 2.24 junto con la Definición 1.9 nos permiten afirmar que el sólido $\Gamma\Delta$ es semejante al sólido $A\Lambda$. $\square$

Proposición 2.28. *Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.*

Demostración. [32] Sean AB un sólido paralelepípedo y $\Gamma\Delta EZ$ un plano verificando:
$AB \cap \Gamma\Delta EZ = \{\Gamma Z, \Delta E\}$, diagonales de los planos opuestos del paralelepípedo.



Queremos probar que el sólido AB será dividido en dos partes iguales por el plano $\Gamma\Delta EZ$.
En primer lugar y respecto a los triángulos ΓHZ, ΓBZ, $A\Delta E$, $\Delta E\Theta$, por la Proposición 34, Libro I:

$$\Gamma HZ = \Gamma BZ, \ A\Delta E = \Delta E\Theta,$$

y en dicho contexto, por la Proposición 2.24 en referencia a los paralelogramos ΓA, EB, HE, $\Gamma\Theta$,

$$\Gamma A = EB, \ HE = \Gamma\Theta.$$

Como consecuencia de la Definición 1.13, el prisma comprendido por ΓHZ, $A\Delta E$ y los paralelogramos HE, $A\Gamma$, ΓE es igual al prisma comprendido por ΓZB, $\Delta E\Theta$ y paralelogramos $\Gamma\Theta$, BE, ΓE; es decir:

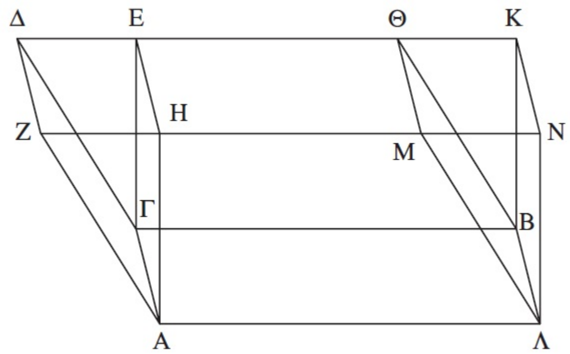
$$Prisma\{\Gamma HZ, A\Delta E; HE, A\Gamma, \Gamma E\} = Prisma\{\Gamma ZB, \Delta E\Theta; \Gamma\Theta, BE, \Gamma E\}.$$

Luego AB es dividido en dos partes iguales por el plano $\Gamma\Delta EZ$. $\square$

[32] Euclides no prueba que las diagonales de dos caras opuestas de un paralelepípedo están en un plano; además, se debería probar que ambos prismas son equivalentes.

Proposición 2.29. *Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí.*

Demostración. Sean ΓM, ΓN sólidos paralelepípedos sobre la misma base AB, de igual altura, $h(\Gamma N) = h(\Gamma M)$, y en los que los extremos laterales AH, AZ, ΛM, ΛN, $\Gamma\Delta$, ΓE, $B\Theta$, BK están en las mismas rectas ZN, ΛK (los cuatro primeros en ZN y los cuatro siguientes en ΛK.).



Comprobemos que $\Gamma M = \Gamma N$.
Comenzamos considerando los paralelogramos $\Gamma\Theta$, ΓK. Por la Proposición 34, Libro I: $\Gamma B = \Delta\Theta$ y $\Gamma B = EK$; de donde se sigue $\Delta\Theta = EK$. Es más,

$$\Delta\Theta - E\Theta = EK - E\Theta \Rightarrow \Delta E = \Theta K.$$

En relación a los triángulos $\Delta\Gamma E$, ΘBK, siguiendo las Proposiciones 4,8, Libro I:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta E = \Theta K \\ \Gamma E = BK \\ \measuredangle(\Delta EC) = \measuredangle(\Theta BK) \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow \quad (base)\Delta\Gamma = (base)\Theta K \quad \Rightarrow \quad \Delta\Gamma E = \Theta BK, \\ \qquad \Delta E = \Theta K, \ \Gamma E = BK \end{array}$$

y por la Proposición 36, Libro I[33],

$$\left.\begin{array}{c} \Delta H, \Theta N \ paralelogramos \\ (base)\Delta E = (base)\Theta K \\ \Delta Z \parallel EH \parallel \Theta M \parallel KN, \ DK \parallel ZN \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta H = \Theta N.$$

Por un razonamiento similar para los triángulos AZH, $M\Lambda N$, $AZH = M\Lambda N$, y siguiendo con los paralelogramos ΓZ, BM, $\Gamma Z = BN$.

[33]Proposición 36, Libro I: Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

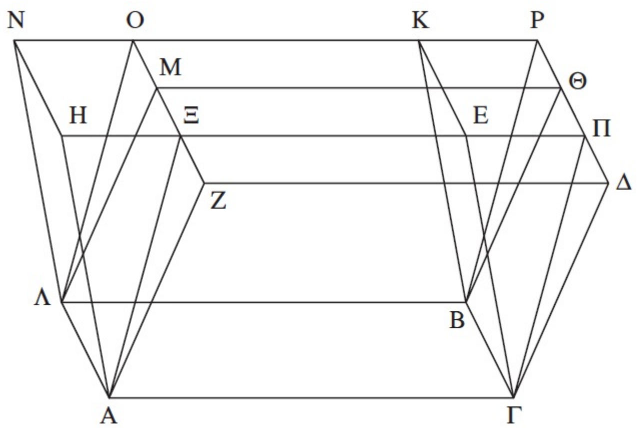
Ahora, la Proposición 2.24 nos asegura que $\Gamma H = BN$, y en base a la Definición 1.10:

$$Prisma\{AZH, \Delta\Gamma E; A\Delta, \Delta H, \Gamma H\} = Prisma\{M\Lambda N, \Theta BK; BM, \Theta N, BN\}.$$

Añadiendo a uno y a otro el sólido cuya base es el paralelogramos AB y plano opuesto $HE\Theta M$, se concluye $\Gamma M = \Gamma N$. □

Proposición 2.30. *Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y a los que (los extremos superiores de) las asristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.*

Demostración. Sean $\Gamma M, \Gamma N$ paralelepípedos tales que están sobre la misma base, $h(\Gamma M) = h(\Gamma N)$, y cuyos extremos superiores de las aristas laterales AZ; AH, ΛM, ΛN, $\Gamma\Delta$, ΓE, $B\Theta$, BK no están en las mismas rectas.



Comprobemos que $\Gamma M = \Gamma N$.
Prolongamos NK, $\Delta\Theta$ hasta que se intersequen, $NK \cap \Delta\Theta = \{P\}$. Prolongamos ZM hasta NK y HE hasta $\Theta\Delta$ de manera que: $ZM \cap NK = \{O\}$, $HE \cap \Theta\Lambda = \{\Pi\}$, y trazamos $A\Xi$, ΛO, $\Gamma\Pi$, BP.
En primer lugar, por la Proposición 2.29 aplicada a los sólidos ΓM, ΓO:

$$\left.\begin{array}{c} AB \textit{ base de ambos};\ h(\Gamma M) = h(\Gamma O) \\ AZ, A\Xi, \Lambda M, \Lambda O \textit{ extremos superiores en } ZO \\ \Gamma\Delta, \Gamma\Pi, B\Theta, BP \textit{ extremos superiores en } \Delta P \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Gamma M = \Gamma O.$$

En segundo lugar, volvemos a aplicar la Proposición 2.29, esta vez a los sólidos ΓO, ΓN,

$$\left.\begin{array}{c} AB \textit{ base de ambos};\ h(\Gamma N) = h(\Gamma O) \\ AH, A\Xi, \Gamma E, \Gamma\Pi \textit{ extremos superiores en } H\Pi \\ \Lambda N, \Lambda O, BK, BP \textit{ extremos superiores en } NP \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Gamma N = \Gamma O.$$

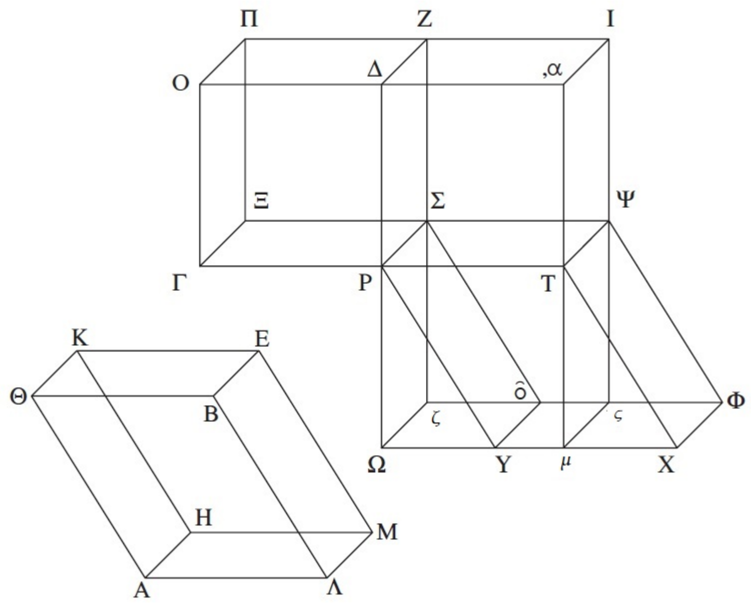
De donde se sigue,

$$\Gamma N = \Gamma O = \Gamma M \Rightarrow \Gamma N = \Gamma M.$$

$\square$

Proposición 2.31. *Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.*

Demostración. Sean AE, ΓZ sólidos paralelepípedos tales que tengan la misma base, $AB = \Gamma\Delta$, y la misma altura, $h(AE) = h(\Gamma Z)$. Veamos que $AE = \Gamma Z$.
En primer lugar, estén levantadas las rectas ΘK, BE, AH y ΛM en ángulos rectos respecto la base AB, y $O\Pi$, ΔZ, $\Gamma\Xi$, $P\Sigma$ en ángulos rectos con la base $\Gamma\Delta$.



Prolongamos PT en línea recta con ΓP y en virtud de la Proposición 23, Libro I, construimos en la recta PT, en el punto P, $\measuredangle(TPY)/\measuredangle(TPY) = \measuredangle(A\Lambda B)$.
Tomamos $PT = A\Lambda$, $PY = \Lambda B$, y por la Proposición 31, Libro I, completamos la base PX y el sólido ΨY.
Aplicamos la Proposición 14, Libro VI[34], a los siguientes pares de paralelogramos. En

[34]Proposición 14, Libro VI: En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que componen los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.

relación a PX, ΘA,

$$\left.\begin{array}{r} TP = A\Lambda \\ PY = \Lambda B \\ \measuredangle(TPY) = \measuredangle(A\Lambda B) \end{array}\right| \Rightarrow \quad PX = \Theta\Lambda\,(y\ semejantes),$$

a $P\Psi$, AM,

$$\left.\begin{array}{r} A\Lambda = PT \\ \Lambda M = P\Sigma \\ \measuredangle(A\Lambda M) = \measuredangle(TP\Sigma) \end{array}\right| \Rightarrow \quad P\Psi = AM\,(y\ semejantes),$$

y con respecto a ΛE, ΣY,

$$\left.\begin{array}{r} P\Sigma = \Lambda M \\ PY = \Lambda B \\ \measuredangle(\Sigma PY) = \measuredangle(M\Lambda B) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Lambda E = \Sigma Y\,(y\ semejantes).$$

Luego, para los sólidos AE, ΨY, por la Proposición 2.24,

$$\Theta\Lambda = KM,\ AM = \Theta E \Rightarrow \Lambda E = AK,$$

$$PX = \Sigma\Phi,\ P\Psi = Y\Phi \Rightarrow \Sigma Y = \Psi X,$$

y en base a la Definición 1.10:

$$AE = \Psi Y.$$

Ahora, trazamos las rectas ΔP, XY / $\Delta P \cap XY = \{\Omega\}$, y por T trazamos la recta $,\alpha T\mu\,/\,,\alpha T\mu \parallel \Delta\Omega$. Prolongamos $O\Delta$ hasta $,\alpha$ y completamos $\Omega\Psi$, PI.
Con respecto a los sólidos $\Psi\Omega$, ΨY, con base el paralelogramos $P\Psi$, y caras opuestas $\Omega\hat{o}$, $Y\Phi$, respectivamente; por la Proposición 2.29:

$$\left.\begin{array}{c} P\Psi\ base\ de\ ambos,\ h(\Psi\Omega) = h(\Psi Y) \\ P\Omega, T\mu, TX, PY\ extremos\ superiores\ sobre\ \Omega X \\ \Sigma\zeta, \Psi\varsigma, \Psi\Phi, \Sigma\hat{o}\ extremos\ superiores\ sobre\ \zeta\Phi \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Psi\Omega = \Psi Y,$$

y como ya vimos que $\Psi Y = AE$, $\Psi\Omega = AE$.
Ahora bien, para los paralelogramos $PYXT$, ΩT, por la Proposición 35, Libro I[35],

$$PT\ base\ de\ ambos,\ PT \parallel \Omega X \Rightarrow PYXT = \Omega T,$$

pero

$$PXYT = AB, AB = \Gamma\Delta \Rightarrow PXYT = \Gamma\Delta \Rightarrow \Omega T = \Gamma\Delta.$$

[35]Proposición 35, Libro I: Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

En virtud de la Proposición 7, Libro V[36], considerando el paralelogramo ΔT,

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta T} = \frac{\Omega T}{\Delta T}.$$

Por otra parte, estamos en condiciones de la Proposición 2.25 respecto al paralelepípedo ΓI, atravesado por el plano PZ / $PZ \parallel \Gamma\Pi$, $PZ \parallel TI$, luego verifica:

$$\frac{\Omega T}{T\Delta} = \frac{\Omega\Psi}{PI},$$

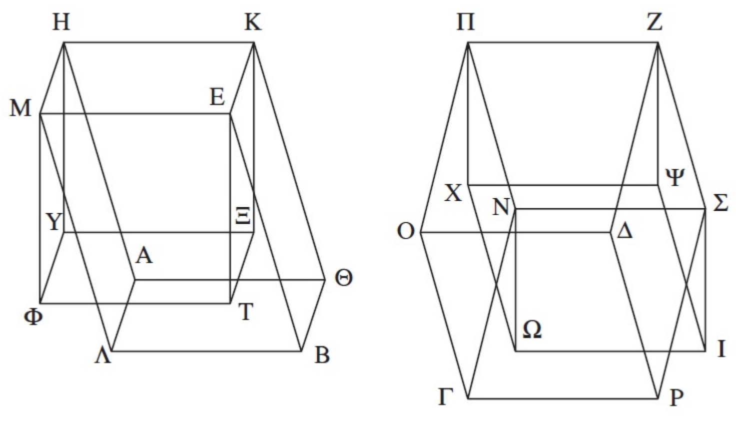
y por la Proposición 9, Libro V[37],

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta T} = \dfrac{\Omega T}{\Delta T} \\[2ex] \dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta T} = \dfrac{\Gamma Z}{PI} \\[2ex] \dfrac{\Omega T}{T\Delta} = \dfrac{\Omega\Psi}{PI} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \frac{\Gamma Z}{PI} = \frac{\Omega\Psi}{PI} \Rightarrow \Gamma Z = \Omega\Psi,$$

pero,

$$\Omega\Psi = AE,\ \Omega\Psi = \Gamma Z \Rightarrow AE = \Gamma Z.$$

En segundo lugar supongamos que las aristas laterales AH, OK, BE, ΛM no forman ángulos rectos con AB, y que ΓN, $O\Pi$, ΔZ, $P\Sigma$ no forman ángulos rectos con $\Gamma\Delta$. Veamos que $AE = \Gamma\Delta$.



Trazamos, en virtud de la Proposición 2.11, desde los puntos K, E, H, M, Π, Z, Λ, Σ hasta

[36] Proposición 7, Libro V: Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud, y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales.

[37] Proposición 9, Libro V: Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón son iguales entre sí, y aquellas con las que una misma magnitud guarda la misma razón son iguales.

el plano de referencia (en el que están AB y $\Gamma\Delta$, respectivamente), las perpendiculares $K\Xi$, ET, HY, $M\Phi$, ΠX, $Z\Psi$, $N\Omega$, ΣI, y únanse con el plano respectivo en los puntos Ξ, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω, I. Trazamos ΞT, ΞY, $Y\Phi$, $T\Psi$, $X\Omega$, ΩI, $I\Psi$.
Los sólidos $K\Phi$, ΠI están sobre las bases iguales KM, $\Pi\Sigma$, con $h(K\Phi) = h(\Pi I)$, y sus aristas laterales forman ángulos rectos con las bases respectivas. Por la primera parte de esta demostración,

$$K\Phi = \Pi I,$$

pero, por la Proposición 2.30,

$$K\Phi = AE, \ \Pi I = \Gamma Z,$$

ya que están sobre la misma base, $h(K\Phi) = h(AE), h(\Pi I) = h(\Gamma Z)$, y los extremos superiores de sus aristas laterales no están sobre las mismas rectas. En conclusión,

$$\left\{ \begin{array}{l} K\Phi = AE \\ \Pi I = \Gamma Z \\ K\Phi = \Pi I \end{array} \right. \Rightarrow \quad AE = \Gamma Z.$$

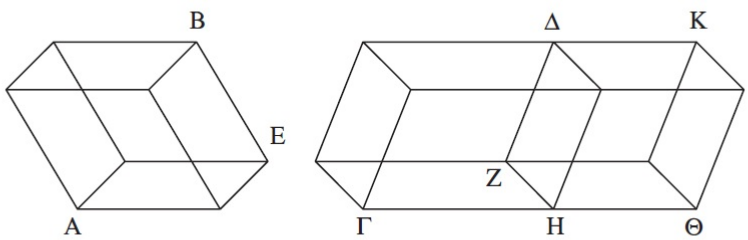
□

Proposición 2.32. *Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ sólidos paralelepípedos tales que $h(AB) = h(\Gamma\Delta)$, y sean AE, ΓZ sus bases, respectivamente. Queremos probar :

$$\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 45, Libro I[38], añadimos a la recta ZH el paralelogramo



$Z\Theta$ / $Z\Theta = AE$; y a partir de la base $Z\theta$, siguiendo la Proposición 31, Libro I, completamos

[38]Proposición 45, Libro I: Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.

el sólido paralelepípedo HK, con $h(HK) = h(\Gamma\Delta)$.
Respecto a los sólidos AB, HK, por la Proposición 2.31,

$$AE = \Theta Z,\ h(HK) = h(AB) \Rightarrow AB = HK.$$

Para finalizar, consideramos que ΓK es cortado por el plano ΔH / $\delta H \parallel \Theta K$, $\Delta H \parallel \Gamma\Pi$.
En virtud de la Proposición 2.25,

$$\frac{\Gamma Z}{Z\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta},$$

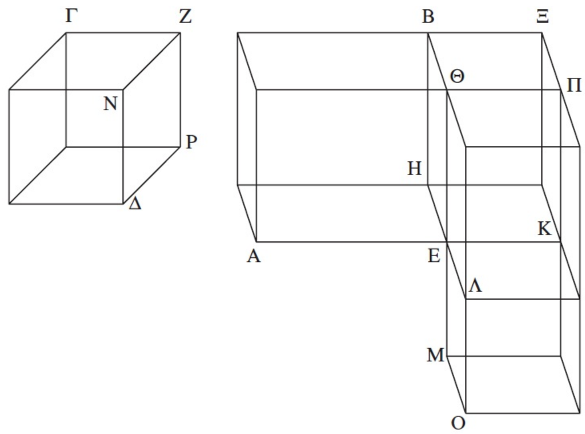
pero,

$$Z\Theta = AE,\ HK = AB \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}.$$

□

Proposición 2.33. *Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.*

Demostración. Sean AB, $\Gamma\Delta$ sólidos paralelepípedos semejantes, y sea el lado AE de AB correspondiente al lado ΓZ de $\Gamma\Delta$. Queremos probar que el sólido AB guarda con el sólido $\Gamma\Delta$ una razón triplicada de la que el lado AE guarda con el lado ΓZ.
Sean EK, $E\Lambda$, EM prolongaciones en línea recta de AE, HE, ΘE / $EK = \Gamma Z$, $E\Lambda = ZN$, $EM = ZP$. Completamos el paralelogramo $K\Lambda$ y el sólido KO.



Como AB, $\Gamma\Delta$ son semejantes, y en virtud de la Proposición 15, Libro I[39], se verifica,

$$\measuredangle(KE\Lambda) = \measuredangle(\Gamma ZN),\ \measuredangle(KEM) = \measuredangle(\Gamma ZP),\ \measuredangle(ME\Lambda) = \measuredangle(NZP),$$

ya que,

$$\measuredangle(AEH) = \measuredangle(\Gamma ZN),\ \measuredangle(AE\Theta) = \measuredangle(\Gamma ZP),\ \measuredangle(HE\Theta) = \measuredangle(NZP).$$

[39]Proposición 15, Libro I: Si dos rectas se cortan, hacen los lados del vértice iguales entre sí.

Estamos en condiciones de emplear la Proposición 14, Libro VI[40], a los pares de paralelogramos $K\Lambda$, ΓN; KM, ΓP; EO y ΔZ.

$$\left.\begin{array}{r} KE=\Gamma Z \\ E\Lambda = ZN \\ \measuredangle(KE\Lambda)=\measuredangle(\Gamma ZN) \end{array}\right| \Rightarrow \quad K\Lambda=\Gamma N,$$

$$\left.\begin{array}{r} KE=\Gamma Z \\ EM = ZP \\ \measuredangle(KEM)=\measuredangle(\Gamma ZP) \end{array}\right| \Rightarrow \quad KM=\Gamma P,$$

$$\left.\begin{array}{r} EM=ZP \\ E\Lambda = ZN \\ \measuredangle(ME\Lambda)=\measuredangle(NZP) \end{array}\right| \Rightarrow \quad EO=\Delta Z.$$

Tenemos tres paralelogramos del sólido KO iguales y semejantes a tres paralelogramos de $\Gamma\Delta$. En virtud de la Proposición 2.24 y la Definición 1.10, $KO=\Gamma\Delta$ (y semejantes).

Completamos ahora el paralelogramo HK y los sólidos $E\Xi$, $\Lambda\Pi$ con bases HK y $K\Lambda$, respectivamente, y altura $h(AB)$.

Por la semejanza de los sólidos AB, $\Gamma\Delta$, y teniendo en cuenta la Definición 1.9 y la Definición 1, Libro VI[41],

$$\frac{AE}{\Gamma Z}=\frac{EH}{ZN}=\frac{E\Theta}{ZP},$$

unido al hecho de que $\Gamma Z=EK,\ ZN=E\Lambda\ y\ ZP=EM$, se tiene:

$$\frac{AE}{EK}=\frac{HE}{E\Lambda}=\frac{\Theta E}{EM},$$

que junto a las relaciones dadas por la Proposición 1, Libro VI[42],

$$\frac{AE}{EK}=\frac{AH}{HK},\ \frac{HE}{E\Lambda}=\frac{HK}{K\Lambda},\ \frac{\Theta E}{EM}=\frac{\Pi E}{KM},$$

dan lugar a que:

$$\frac{AH}{HK}=\frac{HK}{K\Lambda}=\frac{\Pi E}{KM}.$$

Es más, por la Proposición 2.32:

$$\frac{AH}{HK}=\frac{AB}{E\Xi},\ \frac{HK}{K\Lambda}=\frac{\Xi E}{\Pi\Lambda},\ \frac{\Pi E}{KM}=\frac{\Pi\Lambda}{KO},$$

[40] Proposición 14, Libro VI: En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.

[41] Definición 1, Libro VI: Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.

[42] Proposición 1, Libro VI: Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

de donde concluimos:

$$\frac{AB}{E\Xi} = \frac{\Xi E}{\Pi\Lambda} = \frac{\Pi\Lambda}{KO}.$$

Por la definición 10, Libro V[43], AB guarda con KO una razón triplicada de la que guarda con $E\Xi$, pero por la Proposición 1, Libro VI,

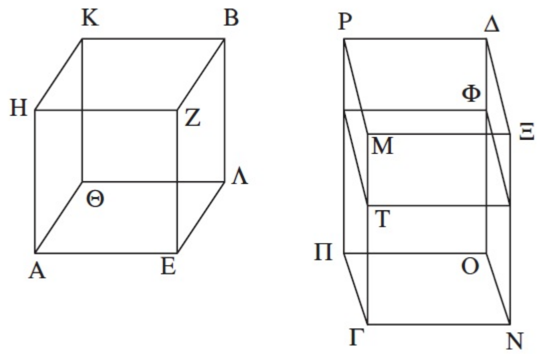
$$\frac{AB}{E\Xi} = \frac{AH}{HK} = \frac{AE}{EK},$$

de donde se sigue que AB guarda con KO una razón triplicada de la que AE guarda con EK. Además, $KO = \Gamma\Delta$ y $EK = \Gamma Z$, luego AB guarda con $\Gamma\Delta$ una razón triplicada de la que su lado correspondiente AE guarda con el lado correspondiente ΓZ. □

Corolario. *Si cuatro rectas son (continuamente) proporcionales, como la primera es a la cuarta, así el sólido paralelepípedo construido a partir de la primera al semejante y construido de manera semejante sobre la segunda, porque también la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que guarda con la segunda.*

Proposición 2.34. *Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas, y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.*

Demostración. [44] Sean AB, $\Gamma\Delta$ sólidos paralelepípedos con $E\Theta$, $N\Pi$ sus respectivas bases y, en primer lugar, formen las aristas laterales AH, EZ, ΛB, ΘK de AB ángulos rectos con $E\Theta$; ΓM, $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP de $\Gamma\Delta$ ángulos rectos con $N\Pi$.



[43]Definición 10, Libro V: Si cuatro magnitudes están en proporción continua, la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que guarda con la segunda.

[44]Euclides asume sin prueba: que si dos paralelepípedos son iguales y tienen bases iguales, sus alturas son iguales; y que si las bases de dos paralelepípedos iguales son desiguales, el que tiene base mayor tiene altura menor.

Si AB=$\Gamma\Delta$, probemos que,

$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)},$$

siendo $h(\Gamma\Delta) = \Gamma M, h(AB) = AH$.
Si $E\Theta = N\Pi$, por la Proposición 2.32,

$$E\Theta = N\Pi \ y \ AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma M = AH \Rightarrow \frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{\Gamma M}{AH} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)}.$$

Supongamos ahora $E\Theta > N\Pi$, así,

$$E\Theta > N\Pi \ y \ AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma M > AH.$$

Definimos la recta ΓT sobre ΓM / $\Gamma T = AH$, y completamos, sobre la base $N\Pi$ y altura ΓT, el sólido paralelepípedo $\Phi\Gamma$. Por la Proposición 7, Libro V,

$$AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{\Phi\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\Phi\Gamma}.$$

Respecto a los sólidos AB, $\Phi\Gamma$, como $h(AB) = h(\Phi\Gamma)$, por la Proposición 2.32:

$$\frac{AB}{\Phi\Gamma} = \frac{E\Theta}{N\Pi}.$$

En relación a los sólidos $\Gamma\Delta$, $\Phi\Gamma$, el plano $T\Phi$ corta a $\Gamma\Delta$ y $T\Phi \parallel N\Pi$, $T\Phi \parallel P\Xi$, luego estamos en las hipótesis de la Proposición 25. Tendremos en cuenta también que, por la Proposición 1, Libro VI,

$$\frac{M\Pi}{T\Pi} = \frac{\Gamma M}{\Gamma T}$$

Así,

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Phi\Gamma} = \frac{M\Pi}{T\Pi} = \frac{\Gamma M}{\Gamma T} \Rightarrow \frac{\Gamma\Delta}{\Phi\Gamma} = \frac{\Gamma M}{\Gamma T}.$$

En conclusión,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{E\Theta}{N\Pi} = \dfrac{AB}{\Phi\Gamma} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Phi\Gamma} = \dfrac{\Gamma M}{\Gamma T} \\ \Gamma T = AH \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{\Gamma M}{AH} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)}.$$

Recíprocamente, supongamos

$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)},$$

y veamos que $AB = \Gamma\Delta$.
Si $E\Theta = N\Pi \Rightarrow h(\Gamma\Delta) = h(AB)$, y por la Proposición 2.31, $AB = \Gamma\Delta$.
Supongamos pues $E\Theta > N\Pi \Rightarrow h(\Gamma\Delta) > h(AB) \Rightarrow \Gamma M > AH$.
Mantenemos la construcción realizada del sólido $\Phi\Gamma$ con $h(\Phi\Gamma) = \Gamma T = AH$ y base $N\Pi$.

$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{M\Gamma}{AH} \ y \ AH = \Gamma T \ \Rightarrow \frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{M\Gamma}{\Gamma T}.$$

Con respecto a los sólidos AB, $\Gamma\Phi$, como $h(AB) = h(\Gamma\Phi)$, por la Proposición 2.32:

$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{AB}{\Gamma\Phi}.$$

Ahora, respecto a los segmentos ΓM, ΓT, por la Proposición 1, Libro VI:

$$\frac{\Gamma M}{\Gamma T} = \frac{M\Pi}{\Pi T} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Phi}.$$

Por tanto, tenemos:

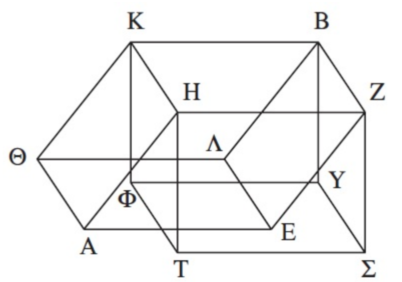
$$\frac{AB}{\Gamma\Phi} = \frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{M\Gamma}{\Gamma T} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Phi} \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma\Phi} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Phi},$$

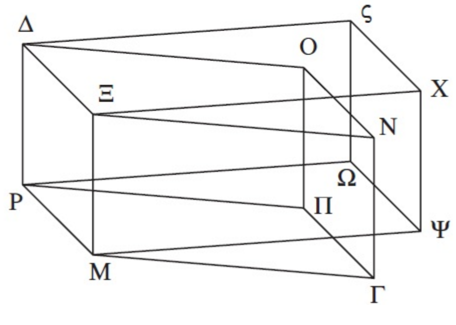
y por la Proposición 9, Libro V[45],

$$\frac{AB}{\Gamma\Phi} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Phi} \Rightarrow AB = \Gamma\Delta.$$

En segundo lugar, no formen las aristas laterales ZE, $B\Lambda$, HA, ΘK ángulos rectos con $E\Theta$, ni $E\Xi$, ΔO, $M\Gamma$, $P\Pi$ ángulos rectos con $N\Pi$.

Trazamos desde los puntos Z, H, B, K perpendiculares al plano que pasa por $E\Theta$, y





únanse con el plano en los respectivos puntos Σ, T, Y, Φ, respectivamente.

Análogamente, trazamos desde los puntos Ξ, M, Δ, P perpendiculares al plano que pasa

[45]Proposición 9, Libro V: Las magnitudes que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas que con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales.

por $N\Pi$, y únanse con el plano en los puntos X, Ω, Ψ, ς, respectivamente.

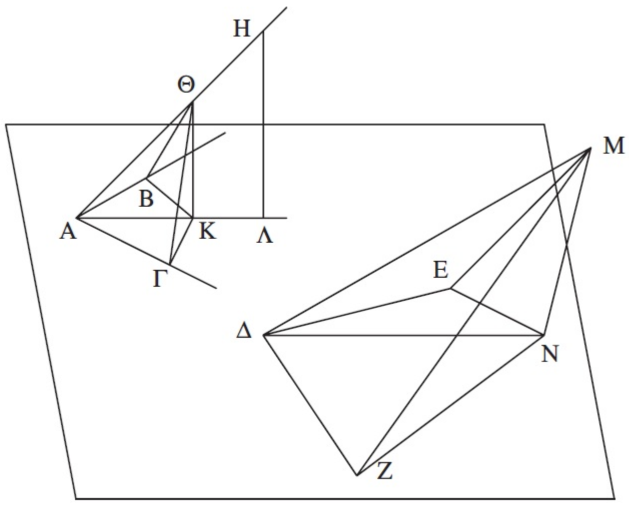
Si $AB = \Gamma\Delta$, veamos que:
$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}.$$
Tomamos los sólidos AB, BT. Están sobre la misma base ZK y $h(AB) = h(BT)$. Por las Proposiciones 2.29, 2.30, $AB = BT$.
De igual manera los sólidos $\Gamma\Delta$, $\Delta\Psi$ están en la misma base PE y $h(\Gamma\Delta) = h(\Delta\Psi)$, $\Gamma\Delta$=$\Delta\Psi$, y como por hipótesis, $AB = \Gamma\Delta$, $BT = \Delta\Psi$; por lo probado en la primera parte de esta demostración:
$$BT = \Delta\Psi \Rightarrow \frac{ZK}{\Xi P} = \frac{h(\Delta\Psi)}{BT},$$
pero, $ZK = E\Theta,\ \Xi P = N\Pi\ y\ h(\Delta\Psi) = h(\Delta\Gamma),\ h(BT) = h(AB)$, luego:
$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{h(\Delta\Gamma)}{h(AB)}.$$

Recíprocamente, supongamos:
$$\frac{E\Theta}{N\Pi} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)},$$
y veamos que $AB = \Gamma\Delta$.
Partiendo de la construcción realizada,
$$E\Theta = ZK\ y\ N\Pi = \Xi P \Rightarrow \frac{ZK}{\Xi P} = \frac{h(\Gamma\Delta)}{h(AB)},$$
y como $h(AB) = h(BT),\ h(\Gamma\Delta) = h(\Delta\Psi)$, por lo demostrado antes,
$$\frac{ZK}{\Xi P} = \frac{h(\Delta\Psi)}{h(BT)} \Rightarrow BT = \Delta\Psi.$$
Para finalizar, por la Proposiciones 2.29, 2.30, respecto a los sólidos BT, BA con la misma base ZK y $h(BT) = h(BA)$; y respecto a los sólidos $\Delta\Psi$, $\Delta\Gamma$ sobre la misma base ΞP, y $h(\Delta\Psi) = h(\Delta\Gamma)$,
$$BT = AB\ y\ \Delta\Psi = \Delta\Gamma,$$
y como $BT = \Delta\Psi$, se concluye $AB = \Delta\Gamma$. □

Proposición 2.35. *Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde ellos, se trazan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos* *en los planos a los vértices de los ángulos iniciales, estos comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales.*[46]

Demostración. Sean $\measuredangle(BA\Gamma)$, $\measuredangle(E\Delta Z)$ / $\measuredangle(BA\Gamma) = \measuredangle(E\Delta Z)$, y levantamos, por la Proposición 2.23, desde los puntos A, Δ las rectas elevadas AH, ΔM, de forma que comprendan con las rectas iniciales ángulos iguales, respectivamente, es decir:

$$\measuredangle(M\Delta E) = \measuredangle(HAB), \ \measuredangle(M\Delta Z) = \measuredangle(HA\Gamma),$$



Sean $H \in AH$, $M \in \Delta M$ puntos al azar y, por la Proposición 2.11, trazamos desde H, M, a los planos que pasan por $BA\Gamma$, $E\Delta\Gamma$, las perpendiculares $H\Lambda$, MN, y únanse a los planos en los puntos N, Λ. Trazamos ΛA, $N\Delta$.

Queremos probar que:

$$\measuredangle(HA\Lambda) = \measuredangle(M\Delta N).$$

Trazamos en la recta AH el segmento $A\Theta$ / $A\Theta = \Delta M$, y trazamos por Θ, gracias a la Proposición 31, Libro I, la recta ΘK / $\Theta K \parallel H\Lambda$.

Por la Proposición 2.8, siendo $BA\Gamma$ plano que contiene el ángulo $BA\Gamma$,

$$H\Lambda \perp BA\Gamma \Rightarrow \Theta K \perp BA\Gamma.$$

Trazamos desde K, N, las rectas $K\Gamma$, NZ, KB, NE tales que:

$$K\Gamma \perp AB, \, NZ \perp A\Gamma, \, KB \perp \Delta Z, \, NE \perp \Delta E,$$

[46]Dicho enunciado se puede resumir de la siguiente manera: En dos ángulos triedros iguales cada par de aristas homólogas forman ángulos iguales con el plano de las otras dos.

y trazamos $\Theta\Gamma$, ΓB, MZ, ZE.
En relación a los triángulos ΘKA, $K\Gamma A$, $\Theta K\Gamma$, por la Proposición 47, Libro I:

$$\begin{aligned}\measuredangle(\Theta KA) = 1\,recto &\Rightarrow \Theta A \times \Theta A = \Theta K \times \Theta K + KA \times KA\\ \measuredangle(KCA) = 1\,recto &\Rightarrow KA \times KA = KC \times KC + CA \times CA\\ \measuredangle(\Theta K\Gamma) = 1\,recto &\Rightarrow \Theta\Gamma \times \Theta\Gamma = \Theta K \times \Theta K + K\Gamma \times K\Gamma,\end{aligned}$$

de donde obtenemos, por substitución:

$$\Theta A \times \Theta A = \Theta K \times \Theta K + K\Gamma \times K\Gamma + \Gamma A \times \Gamma A = \Theta\Gamma \times \Theta\Gamma + \Gamma A \times \Gamma A,$$

y en base a la Proposición 48, Libro I[47], $\measuredangle(\Theta\Gamma A) = 1\,recto$.
Por un razonamiento similar,

$$\begin{aligned}\measuredangle(\Delta NM) = 1\,recto &\Rightarrow \Delta M \times \Delta M = \Delta N \times \Delta N + NM \times NM\\ \measuredangle(\Delta ZN) = 1\,recto &\Rightarrow \Delta N \times \Delta N = \Delta Z \times \Delta Z + ZN \times ZN\\ \measuredangle(ZNM) = 1\,recto &\Rightarrow MZ \times MZ = ZN \times ZN + MN \times MN,\end{aligned}$$

y,

$$\Delta M \times \Delta M = MZ \times MZ + \Delta Z \times \Delta Z \Rightarrow \measuredangle(\Delta ZM) = 1\,recto.$$

Concluimos que, $\measuredangle(\Theta\Gamma A) = \measuredangle(\Delta ZM)$.
Ahora, para los triángulos MSZ, $\Theta A\Gamma$, por la Proposición 26, Libro I:

$$\left.\begin{aligned}\measuredangle(M\Delta Z) &= \measuredangle(\Theta A\Gamma)\\ \measuredangle(\Theta\Gamma A) &= \measuredangle(\Delta ZM)\\ \Theta A = M\Delta,\ &\textit{subtienden a los ángulos iguales}\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad A\Gamma = \Delta Z.$$

De la misma forma, como $\measuredangle(\Theta AB) = \measuredangle(M\Delta E)$, $AB = \Delta E$.
En base a los datos conocidos, por la Proposición 4, Libro I, para los triángulos $A\Gamma B$, $Z\Delta E$,

$$\left.\begin{aligned}A\Gamma &= \Delta Z\\ AB &= \Delta E\\ \measuredangle(\Gamma AB) &= \measuredangle(Z\Delta E)\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad (base)B\Gamma = (base)EZ \Rightarrow A\Gamma B = Z\Delta E \Rightarrow \measuredangle(A\Gamma B) = \measuredangle(\Delta ZE),$$

unido al hecho de que $\measuredangle(A\Gamma K) = 1\,recto = \measuredangle(\Delta ZN)$,

$$\measuredangle(A\Gamma K) - \measuredangle(A\Gamma B) = \measuredangle(\Delta ZN) - \measuredangle(\Delta ZE) \Rightarrow \measuredangle(B\Gamma K) = \measuredangle(EZN).$$

[47]Proposición 48, Libro I: Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

Por el mismo razonamiento, $\measuredangle(\Gamma BK) = \measuredangle(ZEN)$.
En virtud de las relaciones entre ángulos encontradas, aplicamos la Proposición 26, Libro I, a los triángulos $B\Gamma K$, EZN,

$$\left.\begin{array}{r} B\Gamma = EZ \\ \measuredangle(B\Gamma K) = \measuredangle(EZN) \\ \measuredangle(\Gamma BK) = \measuredangle(ZEN) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Gamma K = ZN,$$

y así, para los triángulos $A\Gamma K$, ΔZN, por la Proposición 4, Libro I,

$$\left.\begin{array}{r} \Gamma K = ZN \\ A\Gamma = \Delta Z \\ \measuredangle(A\Gamma K) = 1\,recto = \measuredangle(NZ\Delta) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)AK = (base)\Delta N.$$

Por otra parte,

$$A\Theta = \Delta M \Rightarrow A\Theta \times A\Theta = \Delta M \times \Delta M,$$

y en relación a los triángulos $AK\Theta$, ΔNM, por la Proposición 47, Libro I,

$$\begin{array}{c} \measuredangle(AK\Theta) = 1\,recto \Rightarrow A\Theta \times A\Theta = AK \times AK + K\Theta \times K\Theta \\ \measuredangle(\Delta NM) = 1\,recto \Rightarrow \Delta M \times \Delta M = \Delta N \times \Delta N + NM \times NM, \end{array}$$

con lo cual,

$$AK\times AK+K\Theta\times K\Theta = DN\times DN+NM\times NM \Rightarrow K\Theta\times K\Theta = NM\times NM \Rightarrow K\Theta = NM.$$

Para finalizar, por la Proposición 2.8 en relación a los triángulos ΘAK, $M\Delta N$,

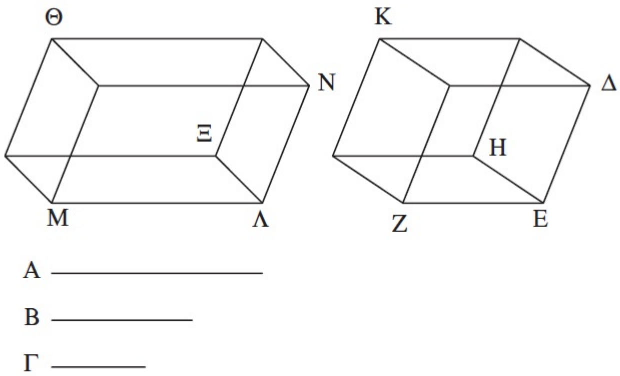
$$\left.\begin{array}{r} \Theta A = M\Delta \\ AK = \Delta N \\ (base)\Theta K = (base)MN \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(\Theta AK) = \measuredangle(M\Delta N) \Rightarrow \measuredangle(\Theta A\Lambda) = \measuredangle(M\Delta N).$$

□

Corolario. *A partir de esto queda claro que, si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde ellos rectas iguales que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, las perpendiculares trazadas desde (los extremos) de ellas hasta los planos en los que están los ángulos iniciales, son iguales entre sí.*

Proposición 2.36. *Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo construido a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo construido a partir de la media proporcional, equilátero y equiangular con el antedicho sólido.*

Demostración. Sean A, B, Γ rectas / $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{\Gamma}$.
Queremos ver que el sólido construido a partir de A, B, Γ es igual al sólido construido a partir de B, equilátero y equiangular con el anterior.



Construimos el ángulo sólido correspondiente a E, $\measuredangle_E(\Delta EH, HEZ, ZE\Delta)$, con las rectas ΔE, EH, EZ verificando $\Delta E = EH = EZ = B$; y completamos el sólido paralelepípedo EK (Proposición 31, Libro I).
Consideramos la recta ΛM / $\Lambda M = A$, y construimos,sobre $\Lambda \in \Lambda M$, gracias a la Proposici'on 2.23, el ángulo sólido definido por las rectas $\Lambda\Xi$, ΛN / $\Lambda\Xi = B$, $\Lambda N = \Gamma$, verificando:

$$\measuredangle_\Lambda(N\Lambda\Xi, \Xi\Lambda M, M\Lambda N) = \measuredangle_E(\Delta EH, HEZ, ZE\Delta).$$

Ahora, respecto a los paralelogramos MN, ΔZ, veamos que son iguales. De las relaciones establecidas en la construcción, unidas a la hipótesis de partida, tenemos que:

$$\frac{\Lambda M}{EZ} = \frac{\Delta E}{\Lambda N} \; y \; \measuredangle(N\Lambda M) = \measuredangle(\Delta EZ),$$

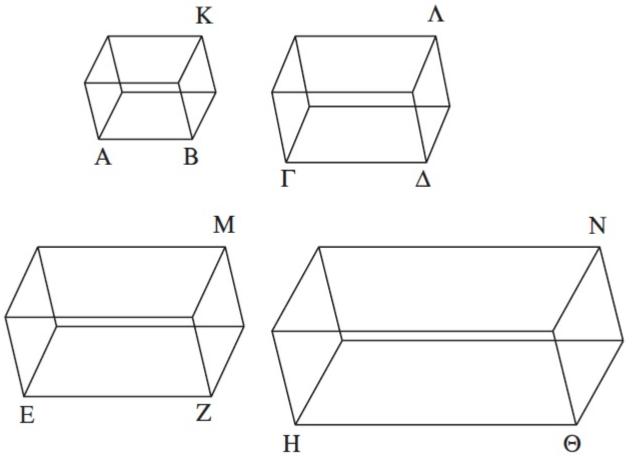
estando en las hipótesis de la Proposición 14, Libro VI, luego: $MN = \Delta Z$.
Por otra parte, sobre $\measuredangle(\Delta EZ)$, $\measuredangle(N\Lambda M)$, se han levantado las rectas $\Lambda\Xi$, EH / $\Lambda\Xi = \Delta H$, comprendiendo ángulos iguales con las rectas iniciales, $\measuredangle(\Xi\Lambda M) = \measuredangle(ZEH)$, entonces, por el Corolario de la Proposición 2.35, las perpendiculares trazadas de los puntos H,Ξ, a los planos que pasan por $N\Lambda M$, ΔEZ son iguales entre sí. Luego, $h(A\Theta) = h(EK)$.
Para finalizar, respecto a los sólidos $A\Theta$, EK, por la Proposición 2.31:

$$(base\ de\ A\Theta)MN = (base\ de\ EK)\Delta Z \; y \; h(A\Theta) = h(EK) \Rightarrow A\Theta = EK,$$

y $A\Theta$ ha sido construido a partir de A, B, Γ, y EK a partir de B, equilátero y equiangular con el primero. □

Proposición 2.37. *Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.*

Demostración. [48] Sean AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$ rectas / $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{EZ}{H\Theta}$.



Construimos a partir de AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$ los sólidos paralelepípedos KA, $\Lambda\Gamma$, ME, NH semejantes y situados de manera semejante. Queremos probar que:

$$\frac{KA}{\Lambda\Gamma} = \frac{ME}{NH}.$$

Por la Proposición 2.33:
KA semejante a $\Lambda\Gamma \Rightarrow KA$ guarda con $\Lambda\Gamma$ una razón triplicada de la que AB guarda con $\Gamma\Delta$, en particular:

$$\frac{KA}{\Lambda\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}.$$

ME semejante a $NH \Rightarrow ME$ guarda con NH una razón triplicada de la que EZ guarda con $H\Theta$, en particular:

$$\frac{ME}{NH} = \frac{EZ}{H\Theta}.$$

En conclusión,

$$\frac{KA}{\Lambda\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta} = \frac{ME}{NH} \Rightarrow \frac{KA}{\Lambda\Gamma} = \frac{ME}{NH}.$$

[48] En esta prueba se asume que si dos razones son iguales, la razón triplicada de una es igual a la razón triplicada de la otra, y viceversa.

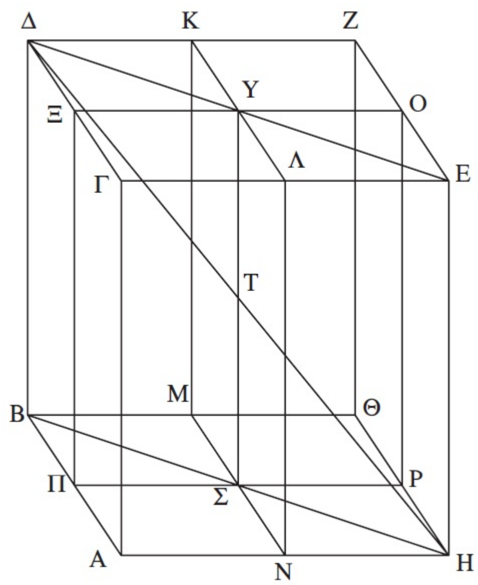
Recíprocamente, supongamos $\frac{AK}{\Lambda\Gamma} = \frac{ME}{NH}$, y comprobemos que $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta}$. Basta considerar la Proposición 2.33:

$$\frac{AK}{\Lambda\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta},\ \frac{ME}{NH} = \frac{EZ}{H\Theta} \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{H\Theta}.$$

□

Proposición 2.38. *Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

Demostración. Sea AZ el cubo. Dividimos en dos los lados de los planos opuestos ΓZ, $A\Theta$ del cubo por los puntos K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, y trazamos los planos KN, ΞP a través de las secciones (Proposición 33, Libro I, y Proposición 2.9).



Sea $Y\Sigma = KN \cap \Xi P$, y ΔH la diagonal del cubo. Tenemos que demostrar que $YT = T\Sigma$, $\Delta T = TH$.

Trazamos ΔY, YE, $B\Sigma$, ΣH.

En primer lugar, por la Proposición 29, Libro I:

$$\Delta\Xi \parallel OE \ y\ \Delta E \cap \Delta\Xi \neq \emptyset \neq \Delta E \cap OE \Rightarrow \measuredangle(\Delta\Xi Y) = \measuredangle(YOE).$$

Seguidamente, por la Proposición 4, Libro I, a los triángulos $\Delta\Xi Y$, OYE:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta E = OE \\ EY = YO \\ \measuredangle(\Delta\Xi Y) = \measuredangle(YOE) \end{array}\right| \Rightarrow \quad (base)\Delta Y = (base)YE \Rightarrow \Delta\Xi Y = OYE \Rightarrow \measuredangle(\Xi Y\Delta) = \measuredangle(OYE),$$

y por la Proposición 14, Libro I[49], $\measuredangle(\Xi Y\Delta) = \measuredangle(OYE) \Rightarrow \Delta YE$ *es una recta.*
De forma similar, $B\Sigma H$ es una recta y $B\Sigma = \Sigma H$.
En segundo lugar, las rectas ΓA, ΔB, EH verifican:

$$\Gamma A \parallel \Delta B,\ \Gamma A = \Delta B \ y \ \Gamma A \parallel EH,\ \Gamma A = EH,$$

de donde se sigue $\Delta B \parallel EH \ y \ \Delta B = EH$, que junto con la Proposición 23, Libro I, nos lleva a que $\Delta E \parallel BH \ y \ \Delta E = BH$.
En base a dicha deducción, según la Proposición 29, Libro I,

$$\left.\begin{array}{c} \Delta E \parallel BH \\ \Delta H \cap \Delta E \neq \emptyset \\ \Delta H \cap BH \neq \emptyset \end{array}\right| \Rightarrow \quad \measuredangle(E\Delta T) = \measuredangle(BHT).$$

Por otra parte, por la Proposición 15, Libro I,

$$\Delta H \cap Y\Sigma = \{T\} \Rightarrow \measuredangle(\Delta TY) = \measuredangle(HT\Sigma).$$

Para finalizar consideramos los triángulos ΔTY, $HT\Sigma$. En base a la Proposición 26, Libro I,

$$\left.\begin{array}{c} \measuredangle(\Delta TY) = \measuredangle(HT\Sigma) \\ \measuredangle(E\Delta T) = \measuredangle(BHT) \\ \dfrac{\Delta E}{2} = \Delta Y = H\Sigma = \dfrac{BH}{2},\ \textit{lados que subtienden ángulos iguales} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \Delta T = TH \ y \ YT = T\Sigma.$$

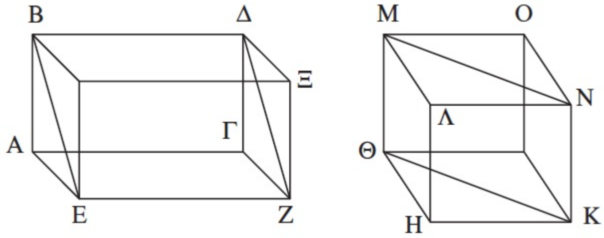
$\square$

Proposición 2.39. *Si dos primas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo, y el paralelogramo es el doble del triángulo, los primas serán iguales.*

Demostración. Sean $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K\Lambda MN$ prismas / $h(AB\Gamma\Delta EZ) = h(H\Theta K\Lambda MN)$.
Además, sean AZ paralelogramo y $H\Theta K$ triángulo de manera que AZ es base de $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K$ es base de $H\Theta K\Lambda MN$ y $AZ = 2 \times H\Theta K$.
Queremos probar que $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.
En primer lugar completamos los sólidos $A\Xi$, HO.
Por la Proposición 34, Libro I,

$$AZ = 2 \times H\Theta K,\ \Theta K = 2 \times H\Theta K \Rightarrow AZ = \Theta K.$$

[49]Proposición 14, Libro I: Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos, y no están en el mismo lado ambas rectas están en línea recta.



En relación a los sólidos $A\Xi$, HO, por la Proposición 2.31,

$$\left.\begin{array}{c} AZ = \Theta K \\ AZ \textit{ base de } A\Xi,\ \Theta K \textit{ base de } HO \\ h(A\Xi) = h(AB\Gamma\Delta EZ) = h(H\Theta K\Lambda MN) = h(HO) \end{array}\right| \Rightarrow \quad A\Xi = HO.$$

Para finalizar, por la Proposición 2.28,

$$A\Xi = 2 \times AB\Gamma\Delta EZ,\ HO = 2 \times H\Theta K\Lambda MN \Rightarrow AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN.$$

$\square$

Bibliografía

[1] Heath, Thomas L., *The thirteen books of Euclid's Elements. Second edition, Revised with adittions* (3 Vols.) Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[2] Euclides, *Elementos* (traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños)(3 Vols.) Gredos, Madrid, 1991-1996.

[3] Euclides, *Elementos*(traducción de Ana Gloria Rodríguez Alonso y Celso Rodríguez Fernández), Clásicos do Pensamento Universal, Fundación BBVA, Universidade de Santiago de Compostela, 2013.